Возрастающая последовательность

Краткая формулировка. Задана числовая последовательность. Требуется построить монотонно возрастающую числовую последовательность, наилучшим образом аппроксимирующую заданную последовательность. Наилучшей считается последовательность с наименьшим суммарным отклонением от заданной.

Более точно. Пусть задана числовая последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Требуется построить последовательность чисел $z_1, z_2, \ldots, z_N$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $z_1 < z_2 < \ldots < z_N$
2. Сумма $|t_1 - z_1| + |t_2 - z_2| + \ldots + |t_N - z_N|$ была бы наименьшей возможной.

Формат входных данных. Входной файл в первой строке содержит натуральное число N (1<=N<=1000000). Каждая из следующих N строк содержит одно целое число – очередной элемент заданной последовательности. В (K+1)-й строке входного файла задается t_K. Все элементы последовательности удовлетворяют соотношению $0 <= t_K <= 2000000000$.

Формат выходных данных. В первой строке выходного файла должно содержаться одно число – наименьшее возможное суммарное отклонение. В каждой из следующих N строк должно содержаться одно число – очередной элемент построенной последовательности.

Следует выводить одну любую последовательность из всех последовательностей с наименьшим суммарным отклонением.

Пример.

Входной файл	Выходной файл
7	13
9	6
4	7
8	8
20	13
14	14
15	15
18	18

Решение

1.

Назовем последовательность (y_1, y_2, … y_N) *неубывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию $y_1 <= y_2 <= … <= y_N$.

Установим взаимно-однозначное соответствие между возрастающими и неубывающими последовательностями следующим образом:

$z_i = y_i + i$, i= 1, 2, …, N

и, соответственно,

$y_i = z_i - i$, i= 1, 2, …, N

Легко видеть, что, если $(z_i)_{i=1\div N}$ – возрастающая последовательность, то $(y_i)_{i=1\div N}$ – неубывающая последовательность, и наоборот.

Сведем исходную задачу к задаче построения наилучшей неубывающей последовательности. Заметим, что $\sum_{i=1}^{N}|t_i - z_i| = \sum_{i=1}^{N}|t_i - (y_i + i)| = \sum_{i=1}^{N}|(t_i - i) - y_i|$.

Следовательно, можем действовать так:

A. заменяем последовательность t_i на последовательность $x_i = t_i - i$, i = 1, 2, …, N

B. находим неубывающую последовательность $(y_i)_{i=1\div N}$, для которой сумма $\sum_{i=1}^{N}|x_i - y_i|$ будет наименьшей возможной

C. вычисляем $z_i = y_i + i$, i= 1, 2, …, N

<u>Определение.</u> Будем называть любую такую последовательность $(y_i)_{i=1\div N}$ *решающей последовательностью*.

2.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $a \le b$. Тогда $\min_y(|y-a|+|y-b|) = |b-a|$, и этот минимиум достигается для всех $a \le y \le b$.

Доказательство очевидно.

<u>Лемма 2.</u> Пусть $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Тогда сумма $\sum_{i=1}^{n}|y - a_i|$ достигает своего минимума при a). $a_k \le y \le a_{k+1}$, если n=2k b). $y = a_k$, если n=2k-1

Доказательство. $\sum_{i=1}^{n}|y-a_i| = (|y-a_1|+|y-a_n|) + (|y-a_2|+|y-a_{n-1}|) + (|y-a_3|+|y-a_{n-2}|) + \ldots$

Заключение леммы сразу вытекает из этого и леммы 1.

<u>Определение.</u> *Медианой* числовой последовательности (x_1, x_2, … x_n) называется число, расположенное в середине последовательности, если расположить ее элементы в неубывающем порядке.

Более точно, пусть последовательность (a_1, a_2, … a_n) получена из последовательности (x_1, x_2, … x_n) перестановкой ее элементов, причем $a_1 \le a_2 \le … … \le a_n$; медиана последовательности (x_1, x_2, … x_n) – это величина $a_{(n+1)\text{ div }2}$:

$$\text{median}(x_1, x_2, \ldots x_n) = a_{(n+1)\text{ div }2}.$$

Следствие. Сумма $\sum_{i=1}^{n}|y-x_i|$ достигает своего минимума при

$$y = \mathrm{median}(x_1, x_2, \dots x_n).$$

3.

Проанализируем последовательность $(y_i)_{i=1\div N}$. Выберем в ней постоянный отрезок $y_p, y_{p+1}, \dots, y_q$: $y_{p-1} < y_p = y_{p+1} = \dots = y_q < y_{q+1}$ (считаем $y_0=-\infty$, $y_{N+1}=+\infty$).

Обозначим $y_p = y$. Тогда сумма $\sum_{i=p}^{q}|y_i-x_i| = \sum_{i=p}^{q}|y-x_i|$ достигает своего минимума при $y = \mathrm{median}(x_p, x_{p+1}, \dots x_q)$.

Отсюда сразу следуют два утверждения:

Лемма 3. Существует решающая последовательность, каждый элемент которой равен некоторому элементу последовательности $(x_i)_{i=1\div N}$.

Лемма 4. Существует решающая последовательность $(y_i)_{i=1\div N}$ следующего вида:
$y_1 = y_2 = \dots = y_{q_1} < y_{q_1+1} = y_{q_1+2} = \dots = y_{q_2} < \dots < y_{q_{R-1}+1} = y_{q_{R-1}+2} = \dots = y_{q_R}$ ($q_R = N$),
причем $y_{q_i} = median(x_{q_{i-1}+1},\ x_{q_{i-1}+2}, \dots, x_{q_i})$

Определение. Назовем такую решающую последовательность *канонической*.

4. Первое решение (индуктивное).

A. Пусть для последовательности $(x_1, x_2, \dots x_k)$ построена каноническая решающая последовательность, т.е. найдены числа $q_1 < q_2 <\dots q_{S-1} < q_S=k$ и $y_{q_1} < y_{q_2} < \dots < y_{q_S}$.

B. Рассмотрим последовательность $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_m)$. Допустим, соответствующая ей каноническая решающая последовательность состоит из одного отрезка – все элементы этой канонической решающей последовательности равны между собой и равны $Y=median\ (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_m)$.

C.

- Если $y_{q_S} < Y$, то полагаем $q_{S+1}=m$, $y_{q_{S+1}} = Y$, и получаем каноническую решающую последовательность для $(x_1, x_2, \dots x_m)$, $m>k$.
- Если $y_{q_S} = Y$, то заменяем q_S на m, и тоже получаем каноническую решающую последовательность для $(x_1, x_2, \dots x_m)$, $m>k$.
- Если $y_{q_S} > Y$, то “сливаем” два последних отрезка: полагаем $Y = median(x_{q_{S-1}+1}, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$ и уменьшаем S на 1.
- Если S>0, то мы оказываемся в условиях пункта B. - переходим на B.;
  если S=0, то каноническая решающая последовательность для $(x_1, x_2, \dots x_m)$ построена – все ее элементы равны между собой и равны $\mathrm{median}(x_1, x_2, \dots x_m)$.

Итого, получаем следующий алгоритм:

Алгоритм 1. последовательно для $k=1, 2, \ldots, (N-1)$

1. полагаем $m=k+1$ и
2. строим каноническую решающую последовательность для $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ так, как описано выше.

Сложность представленного алгоритма $O(N^2)$ при затратах памяти $O(N^2)$.

5. Второе решение (основанное на Quick-подходе).

Положим

$L(b_1, b_2, \ldots, b_P)$ количество таких элементов b_i массива $(b_1, b_2, \ldots, b_P)$, что $b_i <$ *median* $(b_1, b_2, \ldots, b_P)$;

$LE(b_1, b_2, \ldots, b_P)$ количество таких элементов b_i массива $(b_1, b_2, \ldots, b_P)$, что $b_i \leqslant$ *median* $(b_1, b_2, \ldots, b_P)$;

$G(b_1, b_2, \ldots, b_P)$ количество таких элементов b_i массива $(b_1, b_2, \ldots, b_P)$, что $b_i >$ *median* $(b_1, b_2, \ldots, b_P)$;

$GE(b_1, b_2, \ldots, b_P)$ количество таких элементов b_i массива $(b_1, b_2, \ldots, b_P)$, что $b_i \geqslant$ *median* $(b_1, b_2, \ldots, b_P)$;

Обозначим $Y = \text{median}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.

Лемма 5. Пусть массив $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ можно разбить на два отрезка $(x_1, x_2, \ldots, x_K)$ и $(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots, x_N)$ так, что выполняются условия:

i. $L(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K) > GE(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K)$ для всех P, $1 \leqslant P \leqslant K$;

ii. $L(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots, x_Q) \leqslant GE(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots, x_Q)$ для всех Q, $K<Q \leqslant N$.

Тогда

$y_K < Y$ для любой решающей последовательности $(y_1, y_2, \ldots y_N)$,

и

существует решающая последовательность, для которой $y_{K+1} \geqslant Y$.

Длказательство.

Пусть $(y_1, y_2, \ldots y_N)$ – некоторая решающая последовательность с $y_K > Y$.

Пусть $y_{K-1} \geqslant Y, y_{K-2} \geqslant Y, \ldots, y_P \geqslant Y$, а $y_{P-1} < Y$ (полагая $y_0 = -\infty$).

Уменьшим на 1 все числа $y_K, y_{K-1}, \ldots, y_P$.

Если $x_i < Y$ $(P \leqslant i \leqslant K)$, то $|y_i - x_i| = y_i - x_i$ уменьшится на 1,

если $x_i \geqslant Y$ $(P \leqslant i \leqslant K)$, то $|y_i - x_i|$ изменится (либо уменьшится либо увеличится) на 1. Следовательно, сумма $\sum_{i=P}^{K} |y_i - x_i|$ увеличится не более чем на

$$GE(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K) - L(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K),$$

а $GE(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K) - L(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K) < 0$ в силу условия i.

Если теперь $y_K = Y$, то процесс останавливаем, если же $y_K > Y$, то повторяем вышеописанное преобразование: снова находим такое P, что $y_{K-1} \geqslant Y, y_{K-2} \geqslant Y, \ldots, y_P \geqslant Y$, а $y_{P-1} < Y$, и уменьшаем на 1 все числа $y_K, y_{K-1}, \ldots, y_P$. Понятно, что после некоторого количества шагов процесс остановится. Сумма $\sum_{i=1}^{N} |y_i - x_i|$ в этом процессе не возрастает, т.е. новая последовательность $(y_1, y_2, \ldots y_N)$ также является решающей.

Во вновь построенной последовательности $y_K = y_{K-1} = \ldots = y_P = Y > y_{P-1}$. Еще раз уменьшим на 1 все числа $y_K, y_{K-1}, \ldots, y_P$. В результате сумма $\sum_{i=P}^{K} |y_i - x_i|$ уменьшится на $L(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K) - GE(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K) > 0$, что противоречит предположению о том, что начальная последовательность является решающей. Полученное противоречие доказывает первое утверждение леммы.

Второе утверждение леммы доказывается аналогично. Приведем это доказательство для полноты.
Пусть у нас имеется некоторая решающая последовательность $(y_1, y_2, \ldots y_N)$, причем $y_{K+1}<Y$.
Пусть $y_{K+2}<Y, \ldots, y_Q<Y$, а $y_{Q+1} \geqslant Y$.
Увеличим на 1 все числа $y_{K+1}, y_{K+2}, \ldots, y_Q$.
Если $x_i \geqslant Y$ $(K<i \leqslant Q)$, то $|y_i - x_i| = y_i - x_i$ уменьшается 1,
если $x_i<Y$ $(K<i \leqslant Q)$, то $|y_i - x_i|$ изменяется (уменьшается либо увеличивается) на 1.
Следовательно, сумма $\sum_{i=P}^{K} |y_i - x_i|$ увеличивается не более, чем на

$$L(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots, x_Q) - GE(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots, x_Q).$$

Эта разность не положительна по условию ii.

Теперь, если $y_{K+1} \geqslant Y$, то останавливаем процесс, если же $y_{K+1}<Y$, то повторяем процесс: снова находим такое Q , что $y_{K+1}<Y$, $y_{K+2}<Y$, …, $y_Q<Y$, и $y_{Q+1} \geqslant Y$, и увеличиваем на 1 все числа $y_{K+1}, y_{K+2}, \ldots, y_Q$. Понятно, что после некоторого (конечного) количества повторений процесс остановится. Сумма $\sum_{i=1}^{N} |y_i - x_i|$ не возрастает в этом процессе, т.е. новая последовательность $(y_1, y_2, \ldots y_N)$ также является решающей.

<u>Lemma 6.</u> Обозначим $D(P) = L(x_1, x_2, \ldots, x_P) - GE(x_1, x_2, \ldots, x_P)$, $1 \leqslant P \leqslant N$.
Пусть P_0 – это наименьшее из тех P, при которых D(P) достигает своего наибольшего значения: $D(P_0) \geqslant D(P)$, $1 \leqslant P \leqslant N$, и $D(P_0) = D(P) \Rightarrow P_0 < P$.
Массив $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ можно разбить на два отрезка так, как описано в условиях леммы 5, тогда и только тогда, когда $D(P_0) > 0$. При этом полагаем $K = P_0$.

Доказательство.
Итак, полагаем $K = P_0$.
Если для некоторого P $(1<P \leqslant K)$ $L(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K) \leqslant GE(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K)$, то
$D(P-1) = D(K) – (L(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K) - GE(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K)) \geqslant D(K)$, и $P-1<K$.
Более того, $L(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K) > GE(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_K)$ для $P=1$,
поскольку $L(x_1, x_2, \ldots, x_K) - GE(x_1, x_2, \ldots, x_K) = D(K) >0$.

Если $L(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots, x_Q) > GE(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots, x_Q)$ для некоторого Q, $K<Q \leqslant N$, то
$D(Q) = D(K) + (L(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots, x_Q) - GE(x_{K+1}, x_{K+2}, \ldots, x_Q)) > D(K)$.

<u>Следствие.</u> Если массив $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ можно разбить на два отрезка в соответствии с условиями леммы 5, то $K \leqslant N-2$.
Доказаьельство.

$D(N) = L(x_1, x_2, \ldots, x_N) - GE(x_1, x_2, \ldots, x_N) < 0$ по определению медианы.
Понятно, что $|D(N)- D(N-1)|=1$, hence $D(N-1) \leqslant 0$.

<u>Лемма 7.</u> Пусть массив $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ невозможно разбить на два отрезка в соответствии с условиями леммы 5, и
пусть массив $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ можно разбить на два отрезка $(x_1, x_2, \ldots, x_M)$ и $(x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots, x_N)$, $M \leqslant N$, так, что

iii. $LE(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_M) \geqslant G(x_P, x_{P+1}, \ldots, x_M)$ для всех P, $1 \leqslant P \leqslant M$;
iv. $LE(x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots, x_Q) \leqslant G(x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots, x_Q)$ для всех Q, $M<Q \leqslant N$.

Тогда существует решающая последовательность, для которой $y_1 = y_2 =\ldots= y_M = Y$.

Доказательство.
Аналогично доказательству леммы 5 получаем, что существует решающая последовательность с $y_{M+1} \geqslant Y$, и $y_M \leqslant Y$.

Кроме того, известно, что массив $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ нельзя разбить на отрезки в соответствии с условиями леммы 5. Это означает (в соотвествии с леммой 6), что для всех P, $1 \leqslant P \leqslant N$, $D(P) \leqslant 0$, т.е. $L(x_1, x_2, \ldots, x_P) \leqslant GE(x_1, x_2, \ldots, x_P)$.

Пусть $y_1 < Y$, $y_2 < Y$, …, $y_R < Y$, и $y_{R+1} \geqslant Y$.
Увеличим на 1 все числа $y_1, y_2, \ldots, y_R$.

Если $x_i<Y$ $(1 \leqslant i \leqslant R)$, то $|y_i - x_i| =y_i - x_i$ изменится (увеличится или уменьшится) на 1, если же $x_i \geqslant Y$ $(1 \leqslant i \leqslant R)$, то $|y_i - x_i|$ увеличится.

Следовательно сумма $\sum_{i=1}^{R} |y_i - x_i|$ увеличится по крайней мере на

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_R) - GE(x_1, x_2, \ldots, x_R) \leqslant 0.$$

Как и выше, повторяем этот процесс до тех пор, пока не окажется $y_1= Y$.
Мы построили решающую последовательность с $y_1 = y_2 = \ldots = y_R = Y$, и $y_M \leqslant Y$. Поскольку последовательность неубывающая, то $y_1 = y_2 = \ldots = y_M = Y$.

<u>Лемма 8.</u> Любой массив $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ можно разбить на два отрезка так, чтобы выполнялись условия iii. и iv. леммы 7.

Доказательство.
Аналогично лемме 6.
Обозначим $DE(P) = LE(x_1, x_2, \ldots, x_P) - G(x_1, x_2, \ldots, x_P)$, $1 \leqslant P \leqslant N$.
Пусть $DE(P)$ достигает своего наибольшего значения при $P=P_0$ ($DE(P_0) \geqslant DE(P)$, $1 \leqslant P \leqslant N$).
Заметим, что $DE(N) \geqslant 0$ по определению медианы, и поэтому $DE(P_0) \geqslant 0$.
Теперь мы можем разбить массив $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ желаемым образом, полагая $M = P_0$.

Итого сформулируем алгоритм решения.
<u>Алгоритм 2.</u>

1. Разбиваем (если это возможно) массив $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ так, чтобы выполнялись условия леммы 5. Метод поиска такого разбиения описан в лемме 6.

2. Если такое разбиение существует, то применяем процесс построения решающей последовательности рекурсивно к обеим частям последовательности.
3. Если же такое разбиение невозможно, то разбиваем массив (x_1, x_2, …, x_N) так, чтобы выполнялись условия леммы 7, методом, описанным в лемме 8. Полагаем $y_1 = y_2 = \ldots = y_M =$ *median* (x_1, x_2, …, x_N) и применяем рекурсивно процесс построения решающей последовательности к правой части полученного разбиения.

Анализ сложности.

В худшем случае сложность алгоритма 2 равна $O(N \cdot T(N))$, где $T(N)$ I- сложность поиска медианы. Медиана может быть найдена с затратами времени $O(N)$ (см. Д.Э.Кнут, *Искусство программирования, том 3. Сортировка и поиск.* 2-е изд. М., "Вильямс", 2002. Теорема L в разделе 5.3.3). Программа `quick2.pas` реализует этот подход. Однако численный эксперимент показал, что эта программа работает, вследствие сложности реализации, относительно медленно. Другой вариант программы (`quick1.pas`) использует "приведенный" QuickSort для поиска медианы и работает гораздо быстрее, чем любая другая из приведенных программ. "Приведенный" QuickSort означает, что мы продолжаем поиск медианы только в одной из двух частей, получающихся в результате разделения массива. Сложность этой процедуры равна $O(N^2)$ в худшем случае и $O(N)$ в среднем.

В среднем сложность алгоритма 2 равна $O(\log N \cdot T(N))$. Это доказывается точно также, как и при анализе QuickSort [Д.Э.Кнут, *Искусство программирования, том 3. Сортировка и поиск.* 2-е изд. М., "Вильямс", 2002. Алгоритм Q в разделе 5.2.2].

Итого

Программа	Сложность	
	В худшем случае	В среднем
quick1	$O(N^3)$	$O(N \cdot \log N)$
quick2	$O(N^2)$	$O(N \cdot \log N)$

Несмотря на то, что `quick1` имеет плохую теоретическую оценку сложности, эта программа работает гораздо быстрее, чем `quick2` (и любая другая из предложенных программ) – см. Приложение. Quick внутри Quick'а работает воистину быстро! ☺

6. Третье решение (динамическое программирование).

Упорядочим массив (x_1, x_2, …, x_N) в неубывающем порядке и удалим из него все повторяющиеся числа. Получим массив (a_1, a_2, …, a_m): $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, причем каждый из элементов массива (x_1, x_2, …, x_N) встречается в массиве (a_1, a_2, …, a_m).

В соответствии с леммой 3 мы можем построить решающую последовательность (y_1, y_2, …, y_N), состоящую из элементов массива (a_1, a_2, …, a_m).

Обозначим $aim(k,j)$ наименьшее возможное значение суммы $\sum_{i=1}^{k}|y_i - x_i|$ при условии $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_k = a_j$.

Алгоритм 3.

Прямой ход – заполнение массива aim.

$$aim(1,j) = |x_1 - a_j|, \text{ j=1, 2, …, m}$$

$$aim(k,j) = |x_k - a_j| + \min_{1 \le p \le j} aim(k-1,p), \text{ j=1, 2, …, m; k=2, 3, …, N}$$

Ясно, что $\min \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = \min_{1 \le j \le m} aim(N,j)$

Обратный ход – построение последовательности (y_1, y_2, … y_N).

Пусть $\min_{1 \le j \le m} aim(N,j) = aim(N,j_0)$. Тогда $y_N = a_{j_0}$.

Находим y_{N-1} из соотношений $y_{N-1} = a_{j_1}$, где $j_1 \le j_0$

и $aim(N-1,j_1) + |y_N - x_N| = aim(N,j_0)$.

Затем аналогично находим последовательно y_{N-2}, y_{N-3}, … y_2, y_1.

Сложность представленного алгоритма 3 равна $O(N^2)$ при затратах памяти $O(N^2)$. Реализация алгоритма представлена в программе `dynamic1.pas`.

Мы можем обойтись без двумерного масива `aim` при построении решающей последовательности (на обратном ходу). Однако тогда обратный ход потребует пересчитывать каждый раз одномерный массив `aim(m,*)`. Такой вариант требует только O(N) памяти, но его сложность оказывается равной $O(N^3)$. Этот вариант реализован в программе `dynamic2.pas`.

Приложение. Сравнение скорости представленных алгоритмов. План генерации тестов.

		Время выполнения (сек.)				
Описание теста	Размер теста (N)	dynamic2	dynamic1	induct	quick1	quick2
Возрастающая последовательность $t_{i+1}-t_i > 1$	1000	63	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1
	2000	173	0.1	<0.1	<0.1	<0.1
	50000	–	–	0.1	0.15	6.1
	100000	–	–	0.3	0.25	8.7
	500000	–	–	1.3	1.5	14.3
	1000000	–	–	2.7	3.3	32.0
Возрастающая последовательность $t_{i+1}-t_i = 1$	1000	50	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1
	2000	100	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1
	500000	–	–	1.2	1.1	2.6
	1000000	–	–	2.4	2.3	5.1
Убывающая последовательность	1000	58	<0.1	0.2	<0.1	<0.1
	2000	157	0.2	0.35	<0.1	<0.1
	10000	–	–	2.1	<0.1	0.15
	30000	–	–	9.9	<0.1	0.3
	50000	–	–	22.3	0.12	0.35
	100000	–	–	116.0	0.2	1.0
	500000	–	–	–	1.2	4.9
	1000000	–	–	–	2.5	9.9
Постоянная последовательность (эквивалентно убывающей последовательности)	1000	58	<0.1	0.2	<0.1	<0.1
	2000	157	<0.1	0.35	<0.1	<0.1
	10000	–	–	2.1	<0.1	0.15
	30000	–	–	9.8	<0.1	0.3
	50000	–	–	22.3	0.12	0.35
	100000	–	–	116.0	0.2	1.0
	500000	–	–	–	1.2	4.9
	1000000	–	–	–	2.3	9.8
1,1,2,2,3,3,4,4,5,5, …	2000	136	0.1	0.35	<0.1	<0.1
	100000	–	–	116.0	0.2	1.0
	1000000	–	–	–	2.1	9.5
1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5, …	2000	139	0.1	0.35	<0.1	<0.1
	100000	–	–	116.0	0.2	0.95
	1000000	–	–	–	2.1	9.6
1,2,1,2,1,2,…	2000	131	<0.1	0.35	<0.1	0.1
	100000	–	–	116.0	0.15	0.95
	1000000	–	–	–	1.6	9.2
1,1,3,3,5,5,7,7,9,9, …	2000	106	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1
	100000	–	–	7.6	0.2	0.7
	1000000	–	–	17.2	2.1	7.2
1,1,1,4,4,4,7,7,7,10,10,10, …	2000	102	<0.1	0.2	<0.1	<0.1
	100000	–	–	10.2	0.2	0.5
	1000000	–	–	102	2.1	5.3
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 100$	1000	56	<0.1	0.2	<0.1	<0.1
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 100$	2000	139	0.1	0.35	<0.1	<0.1
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^6$	2000	158	0.15	0.3	<0.1	0.12
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 100$	10000	–	–	2.1	<0.1	0.15
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^6$	10000	–	–	1.4-1.6	<0.1	0.3-0.4
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 100$	30000	–	–	9.8	<0.1	0.3-0.35
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^6$	30000	–	–	4.8-5.3	0.1	0.7-0.8
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 500$	50000	–	–	22.3	0.12	0.45-0.5
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^5$	50000	–	–	19.3	0.12	0.5-0.55
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^8$	50000	–	–	7.9-8.0	0.15	1.4-1.7
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^5$	100000	–	–	135	0.2	1.0
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^9$	100000	–	–	15-16	0.3	2.9-3.2
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^6$	300000	–	–	740-790	0.6-0.8	3.5-7
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^9$	300000	–	–	55-60	0.9-1.0	8.5-9.5
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^6$	500000	–	–	–	1.25-1.3	4.8-4.9
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 5 \cdot 10^7$	500000	–	–	160	1.6	12.5-13

Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 2 \cdot 10^9$	500000	–	–	**120-140**	**1.7-1.8**	**13-14**
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 10^6$	1000000	–	–	–	**2.2-2.3**	**9.7-10.0**
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 5 \cdot 10^8$	1000000	–	–	**240-280**	**3.2-3.4**	**26-28**
Случайная последовательность, $0 \leqslant t_i \leqslant 2 \cdot 10^9$	1000000	–	–	**240-280**	**3.3-3.6**	**26-28**