

при любом $n > 0$. А это правильно, потому что это дробные части нецелых чисел, которые в сумме дают целое число $n+1$. Действительно, разбиение.

3.3 ПОЛ/ПОТОЛОК: РЕКУРРЕНТНОСТИ

Полы и потолки обеспечивают широкий простор для изучения рекуррентных соотношений. Для начала рассмотрим рекуррентность

$$K_0 = 1, \\ K_{n+1} = 1 + \min(2K_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor n/3 \rfloor}) \quad \text{при } n \geq 0. \quad (3.16)$$

Так, например, K_1 есть $1 + \min(2K_0, 3K_0) = 3$, а сама последовательность начинается с чисел 1, 3, 3, 4, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 13, Один из авторов этой книги с присущей ему скромностью решил назвать их числами Кнута.

В упр. 25 предлагается подтвердить или опровергнуть, что $K_n \geq n$ при любом $n \geq 0$. Несколько только что перечисленных первых K -чисел действительно удовлетворяют этому неравенству, так что имеется некоторое основание считать, что оно справедливо и в общем случае. Попробуем доказать его по индукции. База индукции при $n = 0$ вытекает непосредственно из определения рекуррентности. Для индуктивного перехода предположим, что данное неравенство выполняется вплоть до некоторого фиксированного неотрицательного n , и попробуем показать, что $K_{n+1} \geq n+1$. По определению рекуррентности нам известно, что $K_{n+1} = 1 + \min(2K_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor n/3 \rfloor})$, а по индуктивному предположению — что $2K_{\lfloor n/2 \rfloor} \geq 2\lfloor n/2 \rfloor$ и $3K_{\lfloor n/3 \rfloor} \geq 3\lfloor n/3 \rfloor$. Однако $2\lfloor n/2 \rfloor$ может быть равным самое меньшее $n-1$, а $3\lfloor n/3 \rfloor$ может быть равным самое меньшее $n-2$. Самое большее, что можно извлечь из нашего индуктивного предположения, это $K_{n+1} \geq 1 + (n-2)$, что явно не дотягивает до неравенства $K_{n+1} \geq n+1$.

Теперь у нас появилось основание усомниться в справедливости неравенства $K_n \geq n$, поэтому попытаемся его опровергнуть. Если мы сумеем найти n , такое, что либо $2K_{\lfloor n/2 \rfloor} < n$, либо $3K_{\lfloor n/3 \rfloor} < n$, — другими словами, такое, что

$$K_{\lfloor n/2 \rfloor} < n/2 \quad \text{или} \quad K_{\lfloor n/3 \rfloor} < n/3,$$

то получим $K_{n+1} < n+1$. Возможно ли такое? Но здесь нам лучше воздержаться от ответа, чтобы не испортить упр. 25.

Рекуррентные соотношения, включающие в себя полы и/или потолки, часто возникают в задачах информатики, поскольку алгоритмы, основанные на важном принципе „разделяй и властвуй“, зачастую сводят задачу размера n к решению тех же задач меньших размеров, являющихся целочисленными долями n . Например, один из способов сортировки n записей при $n > 1$ состоит

в том, чтобы разделить их на две примерно равные части: одну — размера $\lceil n/2 \rceil$, а другую — размера $\lfloor n/2 \rfloor$. (Кстати, обратите внимание, что

$$n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor; \quad (3.17)$$

эта формула оказывается кстати довольно часто.) После того как каждая часть отсортирована отдельно (тем же самым методом, применяемым рекурсивно), можно объединить записи в требуемом порядке, выполнив самое большее $n - 1$ дополнительных сравнений. Таким образом, общее число выполненных сравнений не превышает $f(n)$, где

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \\ f(n) &= f(\lceil n/2 \rceil) + f(\lfloor n/2 \rfloor) + n - 1 \quad \text{при } n > 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Решение этой рекуррентности приводится в упр. 34.

В задаче Иосифа из гл. 1 фигурирует сходная рекуррентность, которой можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} J(1) &= 1, \\ J(n) &= 2J(\lfloor n/2 \rfloor) - (-1)^n \quad \text{при } n > 1. \end{aligned}$$

Теперь мы располагаем уже бóльшим числом приемов по сравнению с тем, что имели в гл. 1, поэтому рассмотрим более достоверную задачу Иосифа, в которой уничтожается каждый третий, а не каждый второй. Если для решения этой более сложной задачи воспользоваться теми же методами, которые срабатывали в гл. 1, то дело закончится рекуррентностью вида

$$J_3(n) = \left\lceil \frac{3}{2} J_3\left(\left\lfloor \frac{2}{3} n \right\rfloor\right) + a_n \right\rceil \bmod n + 1,$$

где 'mod' — это функция, которой мы вскоре займемся, и $a_n = -2$, $+1$ или $-\frac{1}{2}$ соответственно при $n \bmod 3 = 0$, 1 или 2 . Но к этой рекуррентности страшно даже подступиться.

Существует другой подход к задаче Иосифа, который приводит к более благоприятной ситуации. Всякий раз, когда один из людей остается нетронутым, ему можно присвоить новый номер. Таким образом, 1-й и 2-й человек становятся $n + 1$ -м и $n + 2$ -м, а 3-й подвергается казни; 4-й и 5-й человек становятся $n + 3$ -м и $n + 4$ -м, а 6-й подвергается казни; ...; $3k + 1$ -й и $3k + 2$ -й человек становятся $n + 2k + 1$ -м и $n + 2k + 2$ -м, а $3k + 3$ -й подвергается казни и так далее до тех пор, пока $3n$ -й человек не подвергнется казни (или не останется в живых). Вот пример перенумерации при $n = 10$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12		13	14		15	16		17
18			19	20			21		22
			23	24					25
			26						27
			28						
			29						
			30						

Казнимый k -м человек прекращает существование вместе со своим номером $3k$. Таким образом, мы можем отгадать, кто останется в живых, если сможем отгадать первоначальный номер человека, получившего номер $3n$.

Если $N > n$, то жертва с номером N должна была иметь некий предыдущий номер, который можно установить следующим образом: поскольку $N = n + 2k + 1$ или $N = n + 2k + 2$, то $k = \lfloor (N - n - 1)/2 \rfloor$. Но предыдущий номер был соответственно $3k + 1$ или $3k + 2$. Это значит, что он был равен $3k + (N - n - 2k) = k + N - n$. Следовательно, номер $J_3(n)$ оставшегося в живых может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned} N &:= 3n; \\ \text{пока } N > n \text{ выполнять } N &:= \left\lfloor \frac{N - n - 1}{2} \right\rfloor + N - n; \\ J_3(n) &:= N. \end{aligned}$$

Это не является выражением для $J_3(n)$ в замкнутой форме — это даже не рекуррентность. Но, по крайней мере при большом n , это позволяет вычислить ответ достаточно быстро.

„Нот ту слоу,
нот ту фаст“
— Л. Армстронг

К счастью, имеется возможность упростить этот алгоритм, воспользовавшись переменной $D = 3n + 1 - N$ вместо N . (Такая замена переменных соответствует присвоению номеров, уменьшающихся от $3n$ до 1, вместо номеров, увеличивающихся от 1 до $3n$, — подобно обратному отсчету времени.) Тогда усложненное правило присвоения значений переменной N становится таким:

$$\begin{aligned} D &:= 3n + 1 - \left(\left\lfloor \frac{(3n + 1 - D) - n - 1}{2} \right\rfloor + (3n + 1 - D) - n \right) \\ &= n + D - \left\lfloor \frac{2n - D}{2} \right\rfloor = D - \left\lfloor \frac{-D}{2} \right\rfloor = D + \left\lceil \frac{D}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2} D \right\rceil, \end{aligned}$$

и предыдущий алгоритм можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} D &:= 1; \\ \text{пока } D \leq 2n \text{ выполнять } D &:= \left\lceil \frac{3}{2} D \right\rceil; \\ J_3(n) &:= 3n + 1 - D. \end{aligned}$$

Ага! Это выглядит гораздо привлекательнее, поскольку n очень просто входит в вычисления. Фактически, рассуждая аналогично, можно показать, что если уничтожается каждый q -й человек, то номер уцелевшего $J_q(n)$ может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned} D &:= 1; \\ \text{пока } D \leq (q - 1)n \text{ выполнять } D &:= \left\lceil \frac{q}{q-1} D \right\rceil; \\ J_q(n) &:= qn + 1 - D. \end{aligned} \tag{3.19}$$

В случае $q = 2$, который нам столь хорошо знаком, переменная D возрастает до 2^{m+1} при $n = 2^m + 1$; следовательно, $J_2(n) = 2(2^m + 1) + 1 - 2^{m+1} = 2l + 1$. Годится.

В (3.19) реализован способ вычисления последовательности целых чисел, которая может быть определена рекуррентно как

$$\begin{aligned} D_0^{(q)} &= 1, \\ D_n^{(q)} &= \left\lceil \frac{q}{q-1} D_{n-1}^{(q)} \right\rceil \quad \text{при } n > 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Эти числа, по-видимому, не связаны каким-нибудь простым способом с какими-нибудь известными функциями, за исключением случая $q = 2$; следовательно, им вряд ли можно придать привлекательный замкнутый вид. Но если мы согласимся принять последовательность $D_n^{(q)}$ за „известную“, то задача Иосифа допускает простое описание: номер уцелевшего $J_q(n)$ равен $qn + 1 - D_k^{(q)}$, где k — наименьшее возможное число, такое, что $D_k^{(q)} > (q-1)n$.

„Известную“ как, скажем, гармонические числа. Э. М. Одлышко и Г. С. Вильф показали [231], что

$$D_n^{(3)} = \lfloor (\frac{3}{2})^n C \rfloor,$$

где

$$C \approx 1.622270503.$$

3.4 ‘MOD’: БИНАРНАЯ ОПЕРАЦИЯ

Если m и n — целые положительные числа, то частное от деления n на m равно $\lfloor n/m \rfloor$. Полезно обозначиться достаточно простым обозначением и для остатка от этого деления — обозначим его через ‘ $n \bmod m$ ’. Основная формула

$$n = m \underbrace{\lfloor n/m \rfloor}_{\text{частное}} + \underbrace{n \bmod m}_{\text{остаток}}$$

позволяет выразить $n \bmod m$ в виде $n - m \lfloor n/m \rfloor$. Это можно распространить на целые отрицательные числа, а фактически — на произвольные вещественные числа:

$$x \bmod y = x - y \lfloor x/y \rfloor \quad \text{при } y \neq 0. \quad (3.21)$$

Тем самым ‘mod’ оказывается бинарной операцией точно так же, как являются бинарными операции сложения и вычитания. Неформально математики издавна использовали понятие mod, вычисляя разные величины по модулю 10, по модулю 2π и т. п., но оно утвердилось лишь в последние двадцать лет формально. Понятие — старое, обозначение — новое.

Когда x и y — вещественные положительные числа, смысл $x \bmod y$ можно легко уловить интуитивно. Вообразим себя бегущими по кругу с длиной окружности y , точкам которой приписаны вещественные числа из интервала $[0, y)$. Если, взяв старт в точке 0, пробежать некоторое расстояние x по окружности, мы остановимся в точке $x \bmod y$. (А пока мы бегаем, точка 0 встретится нам $\lfloor x/y \rfloor$ раз.)

Когда же x или y отрицательны, нужно внимательно вникнуть в определение, с тем чтобы точно выяснить, что в этом

Откуда взялось название ‘mod’: бинарная операция? Вы узнаете это в следующей, волнующей, главе!