

ГЛАВА III

Деревья

§ 1. Деревья и леса

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов; такой граф, в частности, не имеет и кратных ребер. Из определения дерева вытекает также, что для каждой пары его вершин существует

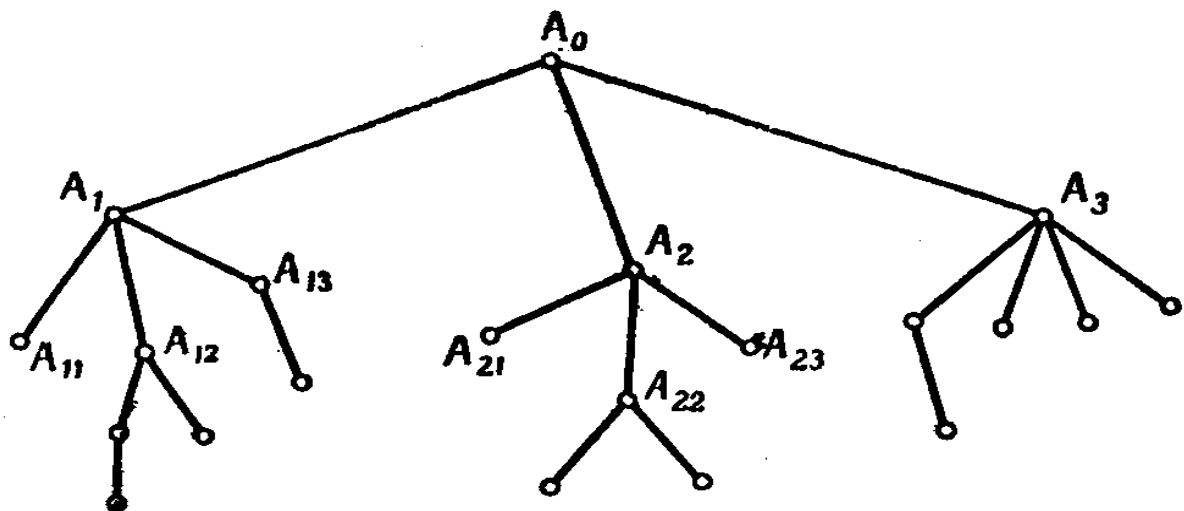


Рис. 34

единственная соединяющая их цепь. Если граф, вообще говоря не связный, не содержит циклов, то каждая его связная компонента будет деревом; пользуясь терминологией, принятой в ботанике, такой граф можно назвать лесом.

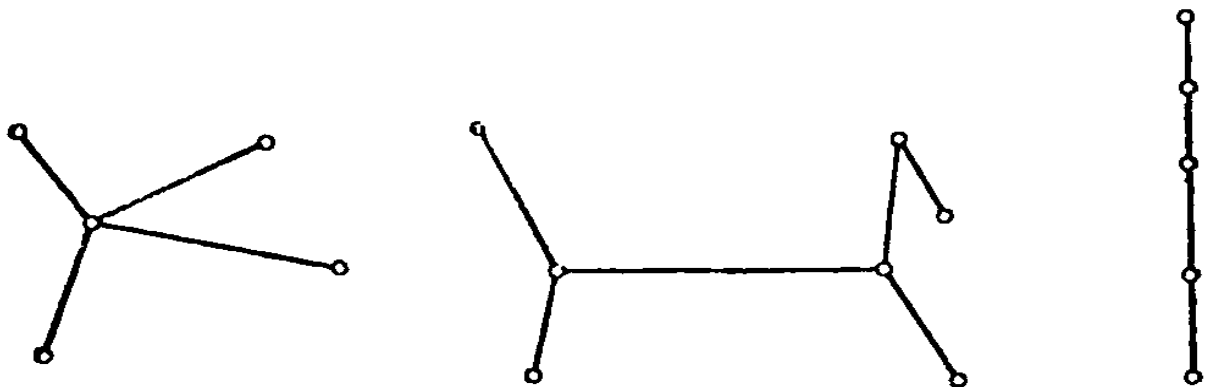
Для того чтобы построить дерево, выберем какую-нибудь вершину A_0 . Из A_0 проведем ребра в соседние вершины A_1, A_2, \dots , из них проведем ребра к их соседям $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{21}, A_{22}, \dots$ и т. д., как показано на рис. 34. Первоначально выбранная вершина A_0 называется корнем дерева; каждая вершина дерева может служить его корнем.

Поскольку на дереве не имеется циклов, различные цепи (или ветви), выходящие из A_0 , будут изолированы друг от друга, как ветви настоящего дерева. Каждая ветвь такого графа должна иметь *последнее*, или *конечное, ребро с конечной вершиной*, из которой уже не выходит ни одного нового ребра.

Согласно этому замечанию, дерево можно построить, последовательно добавляя ребра в его вершинах. Это дает возможность сосчитать число ребер дерева. Простейшее дерево имеет только одно ребро; точнее говоря, оно состоит из двух вершин и одного ребра. Каждый раз, когда мы добавляем еще одно ребро в конце ветви, прибавляется также и вершина, следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Дерево с n вершинами имеет $n-1$ ребер.*

Вместо одного дерева рассмотрим теперь лес, состоящий из k связных компонент, каждая из кото-



Р и с. 35

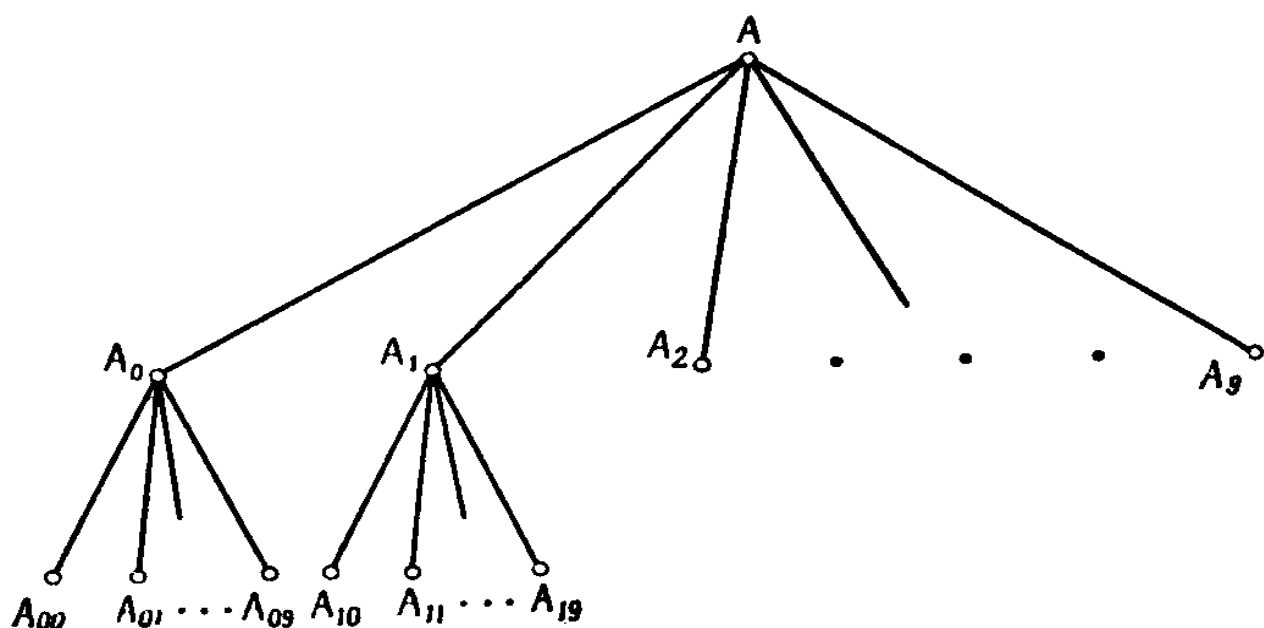
рых является деревом (рис. 35). Для каждой из компонент число ребер на единицу меньше числа вершин. Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Лес, состоящий из k компонент и имеющий n вершин, содержит $n - k$ ребер.*

Деревья имеют многочисленные применения. Здесь мы упомянем лишь, что каждый процесс сортировки может быть представлен в виде некоторого дерева. Так, например, рис. 34 можно представлять себе как описание процесса сортировки почты. Первоначаль-

ная пачка писем обозначена A_0 . Почта внутри страны может быть обозначена через A_1 , почта в Европу — через A_2 , почта на Дальний Восток — через A_3 и т. д. Местная почта A_1 делится на восточную, западную, центральную, почта в Европу A_2 делится по странам и т. д.

Процесс сортировки перфокарт может быть представлен таким же графом, только здесь дерево обычно имеет вполне определенный вид, так как отверстия



Р и с. 36

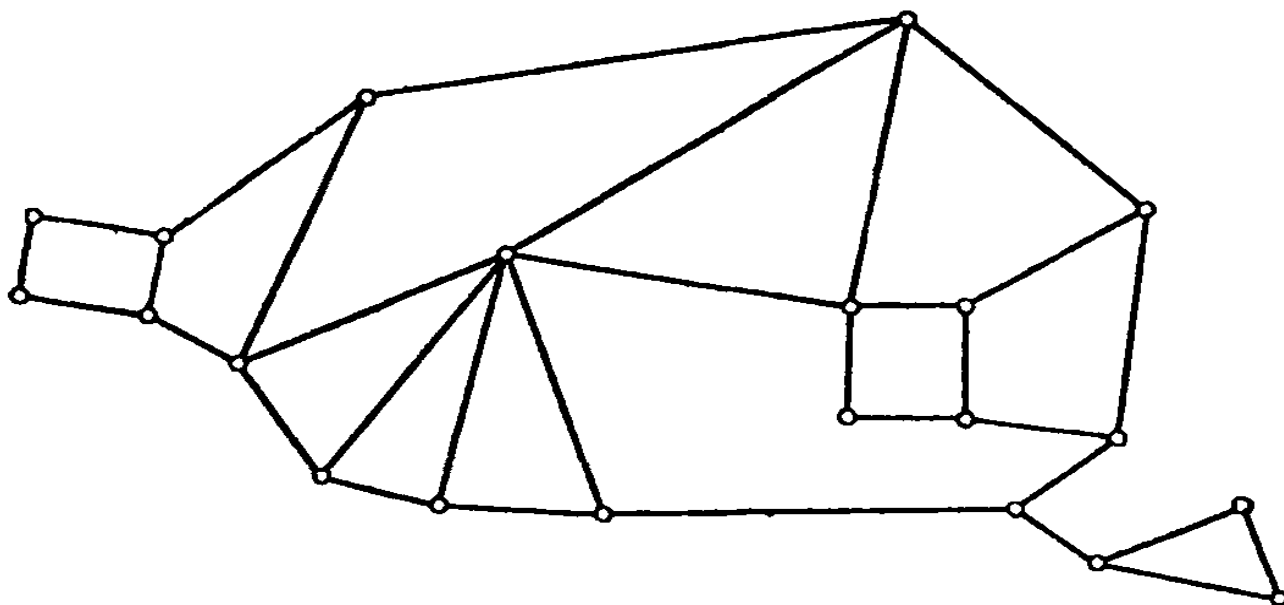
на перфокарте расположены правильными колонками, в каждой из которых обычно бывает 10 мест. Следовательно, при распределении перфокарт по отверстиям в первой колонке имеется 10 возможностей: A_0, A_1, \dots, A_9 , в каждой из них — снова по 10 возможностей: $A_{00}, A_{01}, \dots, A_{09}$ и т. д. (рис. 36). Этот процесс можно рассматривать как процесс разбиения целых чисел на группы в зависимости от их первой, второй и т. д. цифры. Впрочем, каждое дерево можно представлять себе как некоторую весьма общую числовую систему.

§ 2. Циклы и деревья

Нашу новую задачу мы сформулируем в сельскохозяйственных терминах. На рис. 37 изображена карта полей некоторой фермы. Предположим, что это

карта нескольких рисовых полей, расположенных на острове; поля окружены земляными плотинами, которые в свою очередь окружены водами озера.

Как обычно при возделывании риса, мы хотим иметь возможность заливать поля водой, открывая отверстия в некоторых из стенок. Для того чтобы оросить все поля, необходимо, очевидно, сломать по крайней мере одну стенку в каждом цикле карты, т. е. сделать так, чтобы стенки, оставшиеся несломанными, образовали граф без циклов. Вопрос состоит в том, чтобы выяснить, сколько именно стен придется сломать.



Р и с. 37

Это приводит к следующей общей задаче относительно графов: *каково наименьшее число ребер, которые надо удалить из данного связного графа, чтобы на нем не осталось ни одного цикла.*

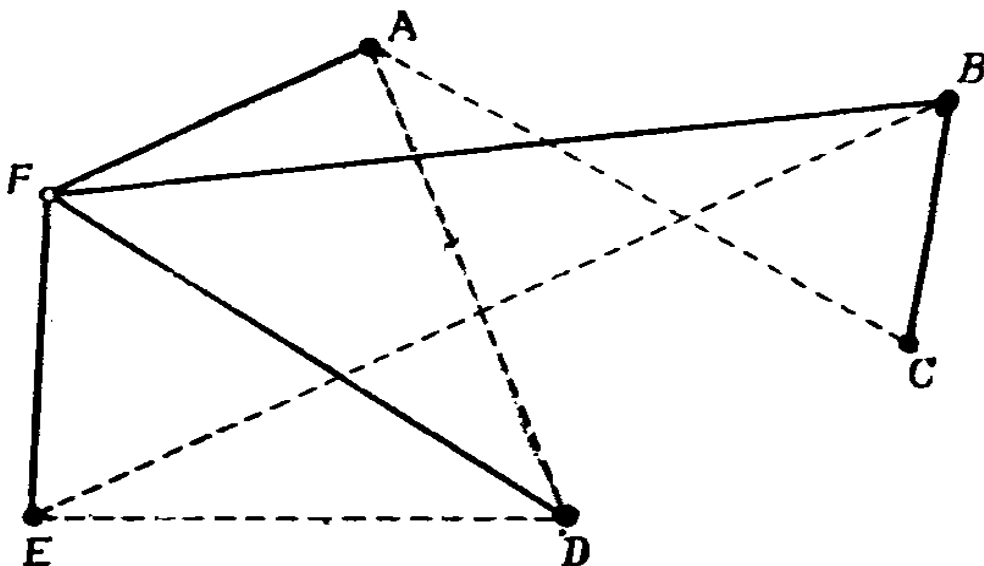
Предположим, что прежде всего мы удалили ребро $\mathcal{E} = (A, B)$, принадлежащее некоторому циклу на графе. При этом граф останется связным, так как вместо того, чтобы проходить от A к B по \mathcal{E} , мы можем пройти от A к B по оставшейся части соответствующего цикла. Если после удаления ребра \mathcal{E} на графе останутся еще циклы, мы отбросим таким же образом другое ребро. Продолжая этот процесс, мы

придем в конце концов к связному графу без циклов, т. е. к дереву \mathcal{T} .

А теперь уже легко подсчитать, сколько ребер нам пришлось удалить. Дерево \mathcal{T} содержит то же самое число n вершин, что и первоначальный граф G . В силу теоремы 1 из § 1 число его ребер равно $n-1$. Следовательно, если вначале на графе G было N ребер, то нам пришлось удалить в точности

$$\gamma = N - n + 1$$

ребер. Это число называется *циклическим порядком*, или *цикломатическим числом*, графа; оно равно уве-



Р и с. 38

личенной на единицу разности между числом ребер и числом вершин графа G .

Итак, для того чтобы превратить граф G в дерево, надо удалить по крайней мере γ ребер. Для того чтобы превратить граф G в лес, состоящий из нескольких деревьев, нам придется удалить из него больше чем γ ребер, так как (в силу теоремы 2 из § 1) число ребер леса, содержащего n вершин, меньше, чем число ребер дерева с n вершинами.

Проиллюстрируем это превращение графа в дерево на рис. 1 (стр. 12). Удалим сначала ребро ED , принадлежащее циклу EFD , затем ребро AD , принадлежащее циклу DFA , и, наконец, ребра AC и BE .

Остается дерево, изображенное на рис. 38. Всего мы удалили

$$\gamma = 9 - 6 + 1 = 4 \text{ ребра.}$$

У п р а ж н е н и я

1. Проверьте результаты этого параграфа на графах рис. 2 и 37.
2. Чему равно цикломатическое число полного графа?

§ 3. Задача о соединении городов

Мы вернемся теперь к имеющей большое практическое значение задаче о средствах сообщения, поставив ее сначала в форме вопроса о проведении дорог. Имеется несколько городов A, B, C, \dots , которые нужно соединить между собой сетью шоссейных или железных дорог. Для каждой пары городов A, B известна стоимость $s(A, B)$ строительства соединяющей их дороги. Задача состоит в том, чтобы построить *самую дешевую* из возможных сетей дорог. Вместо того чтобы говорить о сети железных дорог, можно было бы говорить об электрических линиях, или о водных путях, или о нефтепроводах и т. п.

В том частном случае, когда имеется всего три города A, B, C , достаточно построить одну из соединяющих линий

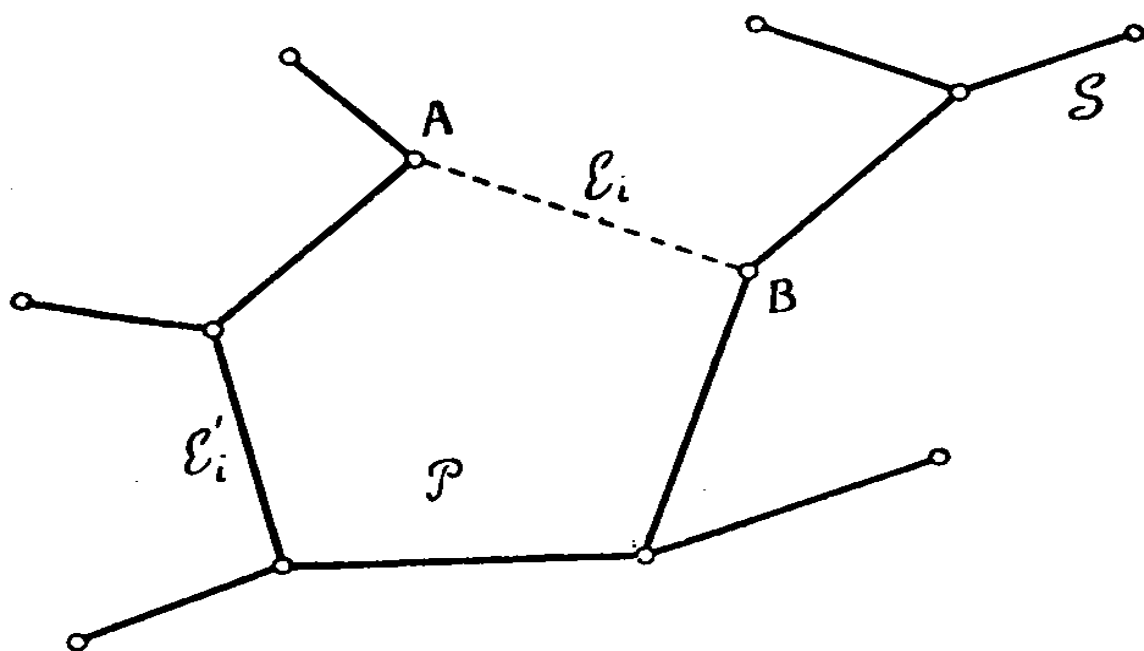
$$ABC, ACB, BAC,$$

причем если BC — самая дорогая линия, то именно ее и надо исключить, построив дорогу BAC .

Рассмотрим теперь общий случай. Граф наиболее дешевой соединяющей сети должен быть деревом, так как если бы он содержал цикл, можно было бы удалить одно из звеньев этого цикла и города все еще остались бы соединенными. Следовательно, для соединения n городов нужно построить $n - 1$ дорог.

Мы покажем, что сеть минимальной стоимости можно построить, пользуясь следующим простым

правилом экономичности. Прежде всего соединяем два города с наиболее дешевым соединяющим звеном \mathcal{E}_1 . На каждом из следующих шагов добавляем самое дешевое из звеньев \mathcal{E}_i , при присоединении которого к уже построенным ребрам не образуется никакого цикла; если имеется несколько звеньев одной и той же стоимости, выбираем любое из них. Каждое дерево \mathcal{T} , построенное таким образом, мы будем называть *экономичным деревом*. Его стоимость равна



Р и с. 39

сумме стоимостей отдельных звеньев:

$$c(\mathcal{T}) = c(\mathcal{E}_1) + c(\mathcal{E}_2) + \dots + c(\mathcal{E}_{n-1}).$$

Нам надо доказать, что никакое другое дерево \mathcal{S} , соединяющее те же вершины, не может оказаться дешевле экономичного дерева \mathcal{T} . Пусть \mathcal{S} — самое дешевое дерево, соединяющее наши вершины, а \mathcal{T} — любое экономичное дерево. Предположим, что ребра $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ экономичного дерева \mathcal{T} занумерованы в том порядке, в котором они присоединялись при построении \mathcal{T} . Если самое дешевое дерево \mathcal{S} не совпадает с \mathcal{T} то \mathcal{T} имеет по меньшей мере одно ребро, не принадлежащее \mathcal{S} . Пусть $\mathcal{E}_i = (A, B)$ — первое такое ребро, и пусть $\mathcal{P}(A, B)$ — цепь графа \mathcal{S} , соединяющая вершины A и B (рис. 39). Если ребро \mathcal{E}_i добавить к \mathcal{S} , то граф

$\mathcal{S} + \mathcal{E}_i$ будет содержать цикл $\mathcal{C} = \mathcal{E}_i + \mathcal{P}(A, B)$, а так как \mathcal{J} не имеет циклов, то цикл \mathcal{C} должен содержать по крайней мере одно ребро, не принадлежащее \mathcal{J} . Удалив это ребро \mathcal{E}'_i , мы получим дерево

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} + \mathcal{E}_i - \mathcal{E}'_i$$

с тем же самым числом вершин, что и \mathcal{S} , причем его стоимость равна

$$c(\mathcal{S}') = c(\mathcal{S}) + c(\mathcal{E}_i) - c(\mathcal{E}'_i).$$

Так как \mathcal{S} имеет наименьшую возможную стоимость, то

$$c(\mathcal{E}_i) \geq c(\mathcal{E}'_i).$$

Но \mathcal{E}_i было звеном наименьшей стоимости, при добавлении которого к $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{i-1}$ не получается циклов. Так как при добавлении ребра \mathcal{E}'_i к этим ребрам мы тоже не получим никакого цикла, то

$$c(\mathcal{E}_i) = c(\mathcal{E}'_i),$$

и, следовательно, \mathcal{S}' тоже имеет минимальную стоимость:

$$c(\mathcal{S}) = c(\mathcal{S}').$$

Таким образом, мы нашли другое дерево \mathcal{S}' минимальной стоимости, имеющее с экономичным деревом \mathcal{J} одним общим ребром больше, чем \mathcal{S} . Мы можем повторять эту операцию до тех пор, пока окончательно получим соединяющее дерево минимальной стоимости, совпадающее с \mathcal{J} . Таким образом, \mathcal{J} , а также все другие экономичные деревья действительно имеют минимальную стоимость.

У п р а ж н е н и я

1. Возьмите на плоскости шесть точек. Найдите дерево наименьшей общей длины, ребра которого соединяют эти вершины.

§ 4. Улицы и площади

Изменение названий улиц и площадей всегда было излюбленным времяпрепровождением городских властей во всем мире — иногда в большей, иногда в меньшей степени. Предположим, что «отцы города», желая добиться большей систематичности в названиях улиц и площадей своего города, потребовали, чтобы каждая улица была длиной в один квартал и носила название одного из смежных с ней уличных перекрестков; так, например, на одном из концов улицы Вашингтона должна находиться площадь Вашингтона.

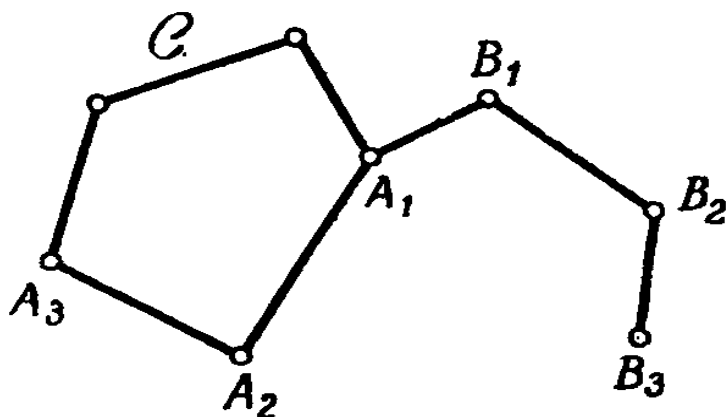


Рис. 40

Мы конечно, хотим поставить соответствующий вопрос для произвольного графа. Дан связный граф. В каком случае можно однозначным образом поставить в соответствие каждому ребру одну из его вершин?

Прежде всего покажем, что это всегда можно сделать, если рассматриваемый граф является деревом. После того как мы выбрали произвольную точку A_0 дерева в качестве его корня (рис. 34), мы поставим в соответствие ребру A_0A_1 вершину A_1 , ребру A_0B_1 — вершину B_1 , ребру A_0C_1 — вершину C_1 . Далее, ребру A_1A_2 мы поставим в соответствие вершину A_2 и т. д. Так каждому ребру $A_{i-1}A_i$ будет поставлена в соответствие вершина A_i , более удаленная от A_0 .

Предположим теперь, что на графе имеется цикл C (рис. 40). Каждому ребру цикла C должна соответствовать одна из его конечных вершин, т. е. одна

из вершин цикла C . Если, например, ребру A_1A_2 соответствует вершина A_2 , то ребру A_2A_3 должна соответствовать вершина A_3 и т. д. Никакому ребру, не принадлежащему C , не может соответствовать вершина из C .

Следовательно, каждому ребру A_1B_1 , имеющему с циклом C общую вершину A_1 , должна соответствовать вершина B_1 , ребру B_1B_2 — вершина B_2 и т. д. Такая цепь $A_1B_1B_2B_3 \dots$ не может вернуться к C , так как все вершины цикла C уже поставлены в соответствие ребрам того же цикла. По аналогичной причине такая цепь не может вернуться и к одной из своих вершин.

Мы видим, таким образом, что часть графа, которой можно достигнуть из точки A_1 на пути, начинающемся ребром A_1B_1 , должна быть деревом \mathcal{T}_1 с корнем A_1 ; то же самое справедливо и для всех других вершин A_i цикла C . Но мы только что видели, что каждому ребру дерева \mathcal{T}_1 можно поставить в соответствие одну из его конечных точек — более удаленную от корня A_1 . Так как ребрам цикла C соответствуют его же вершины A_i , мы приходим к следующему результату.

Для того чтобы можно было поставить в соответствие каждому ребру связного графа одну и только одну из его конечных вершин, необходимо и достаточно, чтобы этот граф либо являлся деревом, либо состоял из единственного цикла C с деревьями, вырастающими из его вершин (рис. 41). Согласно теореме 1 из § 1, число вершин дерева на единицу больше числа его ребер; если граф представляет собой цикл или цикл с деревьями, растущими из его вершин, то число его ребер равно числу вершин. Таким образом, лишь при этих условиях мы можем рассчитывать на установление требуемого соответствия между ребрами и вершинами.

Дерево рис. 34 или граф рис. 41 могут представлять карту улиц только очень маленьких городов, где нет обычных городских кварталов или где имеется лишь один центральный жилой массив, к которому подходят улицы, идущие от окраин.

И вот, заметив, не без гордости за свой город, что он слишком велик для применения такого метода, члены городского совета решили заменить его следующим правилом: улицы и площади должны быть названы так, чтобы из каждой площади исходила улица с тем же названием; например, на площади Вашингтона непременно должна начинаться улица Вашингтона.

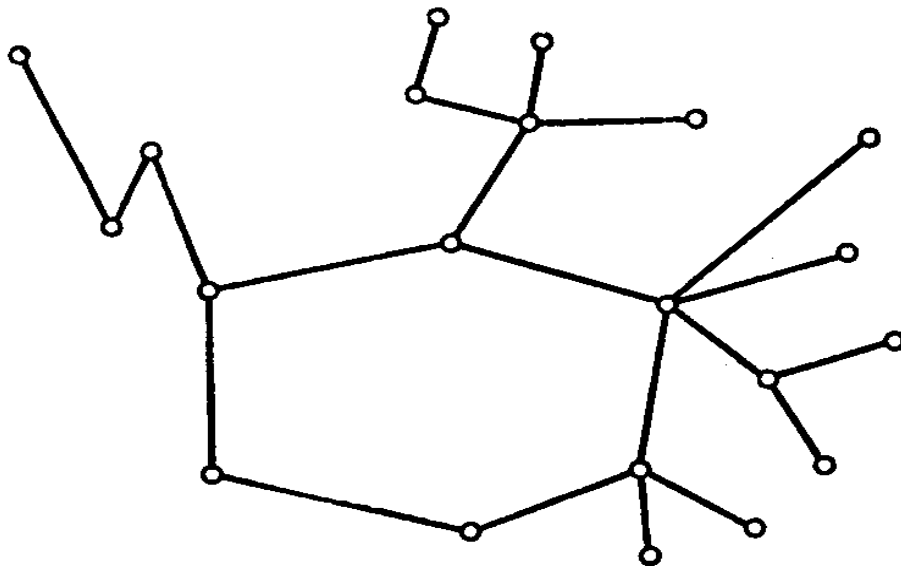


Рис. 41

На языке теории графов это означает, что для каждой вершины графа надо однозначно указать соответствующее ей ребро, выходящее из этой вершины. Бывают случаи, когда это сделать невозможно: для дерева, например, по теореме 1 из § 1, число вершин на единицу больше числа ребер. Однако даже и в этом случае наше условие может быть почти полностью выполнено. Посмотрим на дерево, изображенное на рис. 34. Можно каждой его вершине поставить в соответствие то ребро, которое ведет от нее к корню A_0 . Тем самым каждой вершине, за исключением корня, будет поставлено в соответствие исходящее из нее ребро.

Деревья в этом отношении представляют собой исключение; вообще же имеет место следующая теорема.

ГЛАВА III. ДЕРЕВЬЯ

В связном графе, не являющемся деревом, каждой вершине можно поставить в соответствие смежное с ней ребро.

Доказательство. Связный граф, имеющий n вершин, содержит по крайней мере $n - 1$ ребер, а если он не является деревом, то число его ребер больше чем $n - 1$. Но каждый граф можно превратить в дерево, удаляя из него некоторые ребра (см. § 2). Пусть $\mathcal{E}_0 = (A_0, B_0)$ — одно из удаляемых ребер, когда граф приводится к дереву \mathcal{T} ; выберем точку A_0 за корень этого дерева. Каждой вершине дерева, за исключением A_0 , можно поставить в соответствие смежное с ней ребро; после этого ребро \mathcal{E}_0 графа можно отнести к вершине A_0 — тогда каждой вершине графа будет поставлено в соответствие смежное с ней ребро.

Интересно отметить, что, как видно из наших рассуждений, всегда можно либо все вершины графа поставить в соответствие смежным с ним ребрам, либо, наоборот, все ребра поставить в соответствие смежным с ними вершинам. В каких случаях возможно и то и другое? Если число вершин графа равно числу его ребер. Такой граф не может быть деревом; он должен иметь вид, изображенный на рис. 41, т. е. должен иметь только один цикл \mathcal{C}^1). В этом случае действительно имеется соответствие обоих видов: ребер — вершинам и вершин — ребрам. Ребра цикла \mathcal{C} ставятся в соответствие вершинам тоже из \mathcal{C} : каждая вершина, не принадлежащая \mathcal{C} , — тому из смежных с ней ребер, которое ближе к \mathcal{C} .

У п р а ж н е н и я

1. Установите соответствие между вершинами и смежными с ними ребрами для графов рис. 1 и 2 (стр. 12).

¹⁾ Так как его цикломатическое число равно 1.