4. ДЕРЕВЬЯ

> Дурак видит не то самое дерево,
> что видит умный.
>
> Вильям Блейк[1])

Все мы знакомы с понятием генеалогического дерева; обобщение этого понятия изучается в настоящей главе. Здесь также затронуты вопросы, относящиеся к остовным деревьям в связных графах и замечательному результату Кэли (в § 10) о перечислении помеченных деревьев. В последнем параграфе рассмотрены некоторые приложения теории графов.

§ 9. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ДЕРЕВЬЕВ

Лесом называется граф, не содержащий циклов; связный лес называется **деревом**. Например, на рис. 9.1 изображен лес, состоящий из четырех компонент, каждая из которых

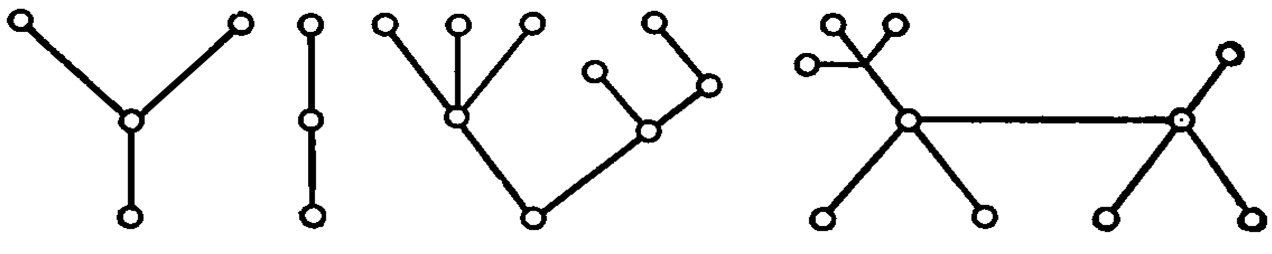

Рис. 9.1.

является деревом[2]). Заметим, что по определению деревья и леса являются простыми графами.

По многим показателям дерево представляет собой простейший нетривиальный тип графа. Как будет показано в тео-

---

[1]) Из «Пословиц ада», перевод С. Я. Маршака. Вильям Блейк (1757—1827) — английский поэт и художник. — *Прим. перев.*

[2]) Последнее дерево, изображенное на рис. 9.1, особенно хорошо известно своим лаем.

реме 9А, оно обладает некоторыми «приятными» свойствами; например, любые две его вершины соединены единственной простой цепью. Пытаясь доказать какой-нибудь общий результат или проверить гипотезу для графов, удобно бывает начать с деревьев, хотя и существует несколько гипотез, которые еще не доказаны для произвольных графов, несмотря на то, что они верны для деревьев.

В следующей теореме перечислены некоторые простые свойства деревьев.

Теорема 9А. *Пусть граф T имеет n вершин. Тогда следующие утверждения эквивалентны:* (i) *T является деревом*; (ii) *T не содержит циклов и имеет $n - 1$ ребер*; (iii) *T связен и имеет $n - 1$ ребер*; (iv) *T связен и каждое его ребро является мостом*; (v) *любые две вершины графа T соединены ровно одной простой цепью*; (vi) *T не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, мы получаем ровно один цикл.*

Доказательство. Если $n = 1$, утверждение очевидно. Предположим поэтому, что $n \geqslant 2$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). По определению T не содержит циклов; тогда, как следует из упр. 5с, удаление любого ребра разбивает T на два графа, каждый из которых является деревом. По индуктивному предположению число ребер в каждом из этих деревьев на единицу меньше числа вершин. Отсюда выводим, что полное число ребер графа T равно $n - 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Если граф T несвязен, то каждая его компонента представляет собой связный граф без циклов. Из предыдущей части доказательства следует, что число вершин в каждой из компонент больше числа ее ребер на единицу. Значит, полное число вершин графа T больше полного числа его ребер по крайней мере на 2, а это противоречит тому, что T имеет $n - 1$ ребер.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Удаление любого ребра приводит к графу с n вершинами и $n - 2$ ребрами, который не может быть связным по теореме 5В.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Так как T связен, то каждая пара его вершин соединена по крайней мере одной простой цепью. Если же данная пара вершин соединена двумя простыми цепями, то они замыкаются в цикл, а это противоречит тому, что каждое ребро в T является мостом (согласно упр. 5с).

(v) $\Rightarrow$ (vi). Если T содержит цикл, то любые две вершины этого цикла соединены по крайней мере двумя простыми цепями. Добавим теперь к графу T какое-то ребро e; тогда мы получим цикл, поскольку инцидентные ребру e вершины уже соединены в T простой цепью. То, что при этом мы получим только один цикл, следует из упр. 5f.

(vi) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что T несвязен; тогда добавление любого ребра, соединяющего вершину одной компоненты с вершиной другой компоненты, не приводит к образованию цикла. //

Следствие 9В. *Пусть G — лес с n вершинами и k компонентами; тогда G имеет $n - k$ ребер.*

Доказательство. Применим к каждой компоненте графа G предложение (ii) теоремы 9А. //

Заметим, что по лемме о рукопожатиях сумма степеней всех n вершин дерева равна удвоенному числу его ребер $(2n - 2)$; отсюда следует, что при $n \geqslant 2$ дерево, имеющее n вершин, всегда содержит не менее двух висячих вершин.

Известно (из упр. 5с), что в связном графе G удаление одного ребра, принадлежащего некоторому выбранному циклу, не нарушает связности оставшегося графа. Применим эту процедуру к одному из оставшихся циклов, и так до тех пор, пока не останется ни одного цикла. В результате получим дерево, связывающее все вершины графа G; оно называется **остовным деревом**[1]) графа G. Пример графа и одного из его остовных деревьев дан на рис. 9.2 и 9.3.

В общем случае обозначим через G произвольный граф с n вершинами, m ребрами и k компонентами. Применяя описанную выше процедуру к каждой компоненте G, получим в результате граф, называемый **остовным лесом**. Число удаленных в этой процедуре ребер называется **циклическим рангом** (или **цикломатическим числом**) графа G и обозначается через $\gamma(G)$. Легко видеть, что $\gamma(G) = m - n + k$ и является неотрицательным целым числом (по теореме 5В). Таким образом, циклический ранг дает меру связности графа (смысл этого понятия будет уточнен в упр. 9k): циклический ранг дерева равен нулю, а циклический ранг цикличес-

[1]) Или остовом, или каркасом. — *Прим. ред.*

кого графа равен единице. Удобно также определить **коциклический ранг** (или **ранг разреза**) графа G как число ребер в его остовном лесе; коциклический ранг обозначается через $\varkappa(G)$ и равен $n - k$.

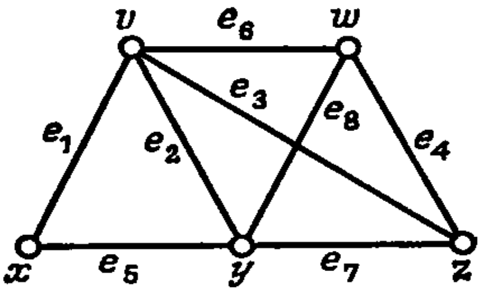

Рис. 9.2.

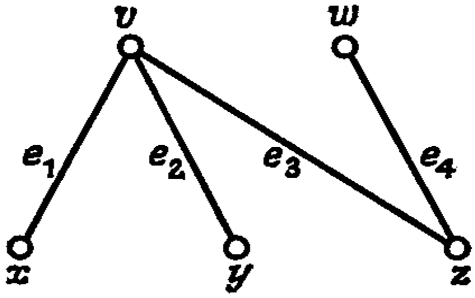

Рис. 9.3.

Прежде чем перейти к следующему разделу, докажем два простых результата, касающихся остовных лесов. В этой теореме **дополнением** остовного леса T некоторого (необязательно простого) графа G является граф, полученный из G удалением ребер T.

Теорема 9С. *Если T — остовный лес графа G, то* (i) *всякий разрез в G имеет общее ребро с T*; (ii) *каждый цикл в G имеет общее ребро с дополнением T.*

Доказательство. (i) Пусть C^* — разрез графа G, удаление которого разбивает одну из компонент G на два подграфа H и K. Поскольку T — остовный лес, в нем должно содержаться ребро, соединяющее вершину из H с вершиной из K; это и есть требуемое ребро.

(ii) Пусть C — цикл в графе G, не имеющий ни одного общего ребра с дополнением T; тогда C содержится в T, что невозможно. //

С понятием остовного леса T графа G тесно связано понятие фундаментальной системы циклов, ассоциированной с T. Оно определяется следующим образом: если добавить к T любое не содержащееся в нем ребро графа G, то по предложению (vi) теоремы 9А получим единственный цикл; множество всех циклов, получаемых таким способом (т. е. путем добавления по отдельности каждого ребра из G, не содержащегося в T), называется **фундаментальной системой циклов, ассоциированной с** T. В том случае, когда нас не интересует, какой остовный лес рассматривается, мы говорим о **фундаментальной системе циклов графа** G. Ясно, что циклы данной фундаментальной системы должны быть различными и что их число должно равняться цикломатическому рангу графа G. На рис. 9.4 показана фундаментальная система циклов графа, изображенного на рис. 9.2, ассоциированная с остовным деревом, изображенным на рис. 9.3.

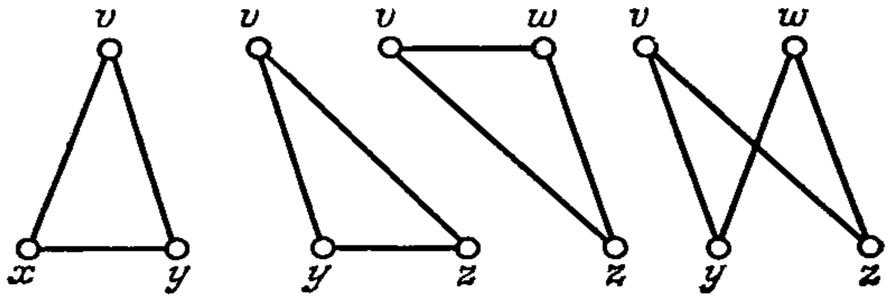

Рис. 9.4.

В свете замечаний, сделанных в конце § 5, можно надеяться, что удастся определить фундаментальную систему разрезов графа G, ассоциированную с данным остовным лесом T. Покажем, что это действительно можно сделать. По предложению (iv) теоремы 9А удаление любого ребра из T разбивает множество вершин дерева T на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2. Множество всех ребер графа G, каждое из которых соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2, является разрезом графа G. Множество всех разрезов, полученных таким способом (т. е. удалением по отдельности каждого ребра из T), называется **фундаментальной системой разрезов, ассоциированной с** T. Ясно, что разрезы данной фундаментальной системы должны быть различными и что их число должно равняться коциклическому рангу графа G. Фундаментальной системой разрезов графа, изображенного на рис. 9.2, ассоциированной с остовным деревом, изображенным на рис. 9.3, является такая система: $\{e_1, e_5\}$, $\{e_2, e_5, e_7, e_8\}$, $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$ и $\{e_4, e_6, e_8\}$.

УПРАЖНЕНИЯ

(9a) Докажите, что существует ровно шесть неизоморфных деревьев с шестью вершинами и одиннадцать — с семью вершинами.

(9b) Докажите, что каждое дерево является двудольным графом; какие деревья являются полными двудольными графами?

(9c) Докажите, что графы, соответствующие (в смысле упр. 1b) насыщенным углеводородам (C_nH_{2n+2}) и спиртам ($C_nH_{2n+1}OH$), являются деревьями.

(9d) Вычислите циклические и коциклические ранги следующих графов: (i) K_n; (ii) $K_{m,n}$; (iii) N_n; (iv) W_n; (v) платоновых графов; (vi) графа Петерсена; (vii) любого связного графа с n вершинами, являющегося регулярным степени r.

(9e) Найдите остовное дерево и ассоциированные с ним фундаментальные системы циклов и разрезов следующих графов: (i) K_5; (ii) $K_{3,3}$; (iii) W_5; (iv) C_6; (v) платоновых графов; (vi) графа Петерсена.

(9f) Докажите, что каждое дерево имеет один или два центра.

(9g) Пусть T_1 и T_2 — остовные деревья связного графа G. Покажите, что для любого ребра e из T_1 существует ребро f из T_2, обладающее тем свойством, что $(T_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ (граф, полученный из T_1 «заменой» e на f) также является остовным деревом. Покажите также, что T_1 можно «перевести» в T_2, «заменяя» каждый раз одно ребро из T_1 ребром из T_2 так, что на каждом шаге получается остовное дерево.

(9h) Докажите, что если некоторое множество C^* ребер графа G обладает тем свойством, что любой остовный лес графа G имеет с C^* общее ребро, то C^* содержит разрез. Получите соответствующий результат для циклов.

(*9i) Пусть A — матрица инциденций дерева с n вершинами. Докажите, что любые $n - 1$ столбцов матрицы A линейно независимы над полем целых чисел по модулю 2.

(*9j) Докажите, что если H и K — подграфы графа G и $H \cup K$, $H \cap K$ определены естественным образом, то коциклический ранг $\varkappa$ удовлетворяет следующим соотношениям: (i) $0 \leqslant \varkappa(H) \leqslant m(H)$ (число ребер в H); (ii) если H — подграф графа K, то $\varkappa(H) \leqslant \varkappa(K)$; (iii) $\varkappa(H \cup K) + \varkappa(H \cap K) \leqslant \varkappa(H) + \varkappa(K)$.

(*9k) Пусть V — векторное пространство, соответствующее простому связному графу G, и пусть T — остовное дерево графа G. Докажите, что фундаментальная система циклов, ассоциированная с T, образует базис подпространства циклов W графа G. Получите соответствующий результат для подпространства разрезов $\widetilde{W}$. Выведите, что размерности подпространств W и $\widetilde{W}$ равны соответственно $\gamma(G)$ и $\varkappa(G)$.

§ 10 ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ

Теория перечисления графов занимается разработкой методов подсчета числа неизоморфных графов, обладающих тем или иным свойством. Вероятнее всего, эта теория возникла в 70-х годах девятнадцатого столетия и связана с именем Кэли, который пытался найти число насыщенных углеводородов C_nH_{2n+2}, содержащих данное число атомов углерода. Как он обнаружил и как читатель видел в упр. 9c, эта задача сводится к подсчету числа деревьев, у которых степень каждой вершины равна либо четырем, либо единице.

Сейчас многие задачи по перечислению графов решены. К примеру, можно подсчитать число графов, орграфов, связных графов, деревьев и эйлеровых графов, содержащих данное число вершин и ребер; однако соответствующие результаты для планарных и гамильтоновых графов еще не получены. Бо́льшую часть всех известных результатов можно получить, применяя основную перечислительную теорему Пойа, хорошее изложение которой можно найти[1]) в книге Ли [6]. К сожалению, почти ни в одном случае невозможно выразить эти результаты с помощью простых формул. В приложении читатель найдет таблицу некоторых известных результатов.

Этот параграф посвящен доказательству знаменитой теоремы, приписываемой обычно Кэли, о числе помеченных деревьев с данным числом вершин. Мы уже встречались с помеченными графами в конце § 2; помеченный граф с n вершинами — это граф, у которого все вершины «помечены» целыми числами от 1 до n. Более точно, определим **распределение меток** в графе G с n вершинами как взаимно однозначное соответствие между множеством вершин G и множеством $\{1, \ldots, n\}$; тогда **помеченным графом** называется пара $\{G, \varphi\}$, где G — граф, а φ — распределение меток в G. Числа 1, ..., n часто будем называть **метками** графа G и обозначать вершины G через $v_1, \ldots, v_n$. Далее, назовем два помеченных графа (G_1, φ_1) и (G_2, φ_2) **изоморфными**, если существует изоморфизм между G_1 и G_2, сохраняющий распределение меток в этих графах.

Для того чтобы разобраться в этих определениях, рассмотрим рис. 10.1, где показаны различные распределения меток в дереве с четырьмя вершинами. Внимательное изучение рисунка позволяет заметить, что второе помеченное дерево является просто перевернутым первым, а отсюда следует, что эти два помеченных дерева изоморфны. С другой стороны, ни одно из них не изоморфно третьему помеченному дереву (достаточно посмотреть на степень вершины v_3). Следовательно, общее число различных распределений меток

[1]) См. также книгу Ф. Харари и Э. Палмера: Перечисление графов, «Мир», М., 1977. — *Прим. ред.*

в данном дереве должно равняться $^1/_2(4!) = 12$, поскольку «переворот» любого распределения меток не приводит к новому объекту. Аналогично, общее число различных распределений меток в дереве, изображенном на рис. 10.2, должно равняться четырем, так как его центральная вершина может быть помечена четырьмя различными способами, каждый из которых однозначно определяет распределение меток.

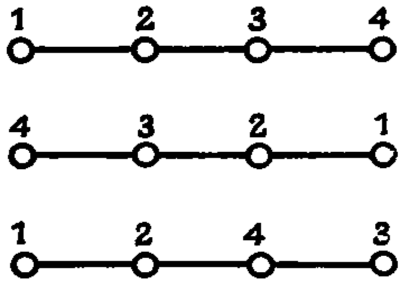

Рис. 10.1.

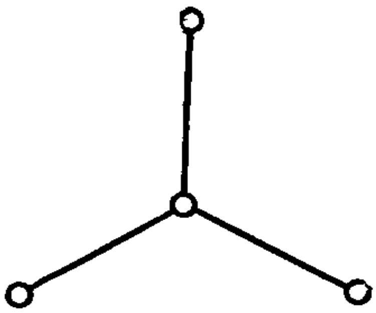

Рис. 10.2.

Отсюда следует, что число всех (неизоморфных) помеченных деревьев с четырьмя вершинами равно шестнадцати. Сейчас мы докажем **теорему Кэли**, обобщающую этот результат на помеченные деревья с n вершинами.

Теорема 10А (Кэли 1889). *Существует ровно n^{n-2} различных помеченных деревьев с n вершинами.*

Замечание. Приведенное здесь доказательство принадлежит Кларку; другие доказательства см. у Муна [7].

Доказательство. Обозначим через $T(n, k)$ число помеченных деревьев с n вершинами, в которых выбранная вершина (скажем v) имеет степень k. Будем искать выражение для $T(n, k)$, а затем получим нужный результат суммированием по k от 1 до $n - 1$.

Пусть A — любое помеченное дерево, в котором $\rho(v) = k - 1$. Удаление любого ребра $\{w, z\}$ из A, не инцидентного v, приводит к двум поддеревьям, одно из которых содержит v и одну из вершин w или z (допустим, что w), а другое содержит z. Если соединить вершины v и z, то получится дерево B, в котором $\rho(v) = k$ (рис. 10.3). Назовем пару (A, B) помеченных деревьев **связкой**, если B можно получить из A описанным выше построением. Наша задача — подсчитать число всех возможных связок (A, B).

Так как A можно выбрать любым из $T(n, k-1)$ способов, а B однозначно определяется ребром $\{w, z\}$, которое может

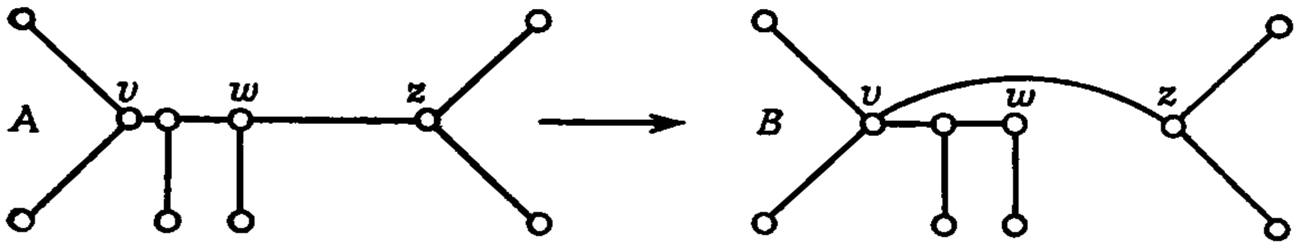

Рис. 10.3.

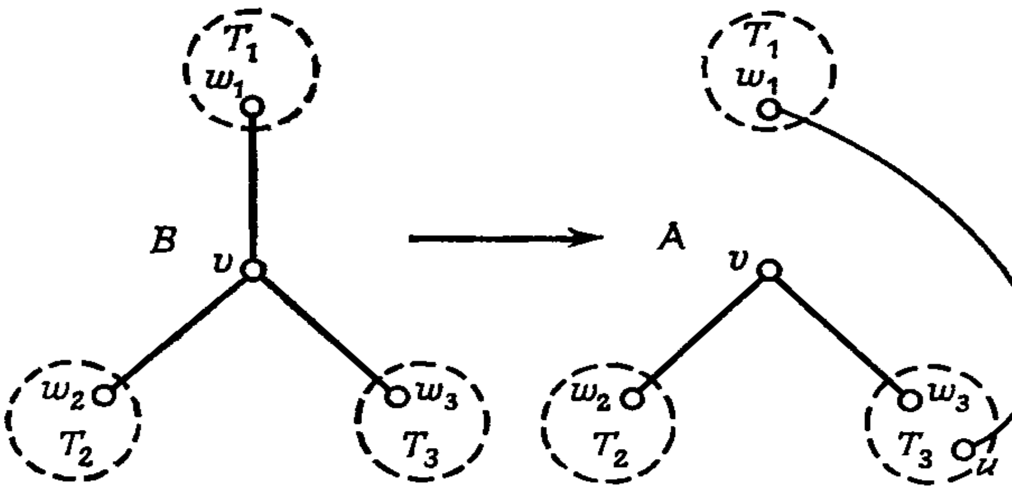

Рис. 10.4.

быть выбрано $(n-1)-(k-1)=n-k$ способами, то число всех связок (A, B) равно $(n-k)T(n, k-1)$. С другой стороны, пусть B — помеченное дерево, в котором $\rho(v)=k$, и пусть $T_1, \ldots, T_k$ — поддеревья, полученные из B удалением вершины v с каждым из инцидентных ей ребер. Тогда помеченное дерево A, у которого $\rho(v)=k-1$, может быть получено удалением из B одного из этих ребер (скажем $\{v, w_i\}$, где w_i лежит в T_i) и соединением w_i с любой вершиной u, принадлежащей любому другому поддереву T_j (рис. 10.4). Очевидно, что соответствующая пара (A, B) помеченных деревьев образует связку и что все связки могут быть получены таким способом. Так как B можно выбрать $T(n, k)$ способами, а число ребер, соединяющих w_i

ком диапазоне областей, как электротехника и лингвистика, исследование операций и кристаллография, вероятность и генетика, социология, география и численный анализ.

Конечно, книга таких размеров не годится для подробного обсуждения многочисленных приложений; поэтому мы отсылаем читателя к прекрасному изложению этого вопроса в гл. 6 книги Басакера и Саати [2]. Здесь мы только напомним читателю некоторые приложения, которые уже встречались в тексте, кратко опишем, что еще имеется в запасе, а затем детально обсудим две частные задачи.

Мы уже видели, как можно использовать графы и орграфы для описания многих ситуаций, включая: *рыночные отношения* (упр. 3f) — здесь использовались двудольные графы, представлявшие различные промышленные предприятия и рынки, на которые поступали их товары; *игры* (упр. 1a (v)) — здесь вершины соответствовали разным стадиям игры, а дуги указывали на возможные ходы; *дружеские отношения* (лемма о рукопожатиях и упр. 1a (iii), 3f, 3j и 7i); *электрические цепи* и *карты дорог* (§ 1); *химические соединения* (§ 10 и упр. 1b и 9c); *головоломки* (второй абзац из § 6 и упр. 6d, 6g, 7d и 7i).

Ниже мы упомянем еще такие приложения, как использование планарных графов при изучении печатных схем (§ 13), применение хроматических многочленов в задачах о составлении расписаний (§ 21) и теории трансверсалей — при построении латинских квадратов и в теории групп (§ 27). Мы обсудим также довольно подробно использование орграфов при изучении цепей Маркова (§ 24) и при решении проблемы нахождения максимальных потоков в транспортных сетях (§ 29).

Оставшаяся часть параграфа посвящена более детальному изучению двух конкретных приложений, одно из которых задача о соединении городов, а второе — гораздо менее серьезная задача.

(i) Представим себе, что мы хотим построить сеть железных дорог, которые соединили бы n данных городов, причем так, чтобы пассажир мог из каждого города проехать в любой другой. Если при этом из экономических соображений требуется, чтобы количество затраченных рельсов было минимальным, то ясно, что граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра — соединяющим их железным дорогам, должен быть деревом. Задача состоит в нахождении алгоритма, определяющего, какое из возможных n^{n-2} деревьев, соединяющих эти города, требует наименьшего количества рельсов, если известны расстояния между каждой парой городов (рис. 11.1).

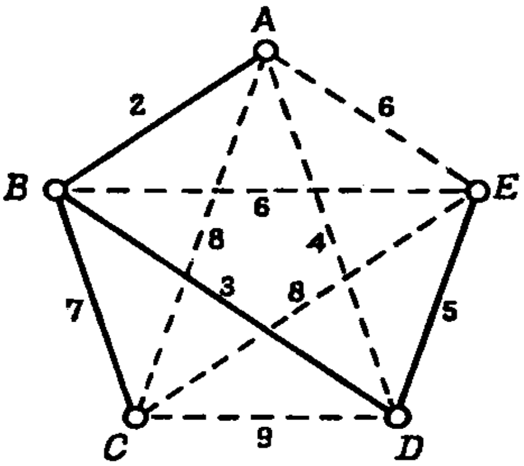

Рис. 11.1.

Можно сформулировать эту задачу в несколько более общем виде на языке теории графов. А именно, пусть G — связный граф, и пусть каждому его ребру e приписано неотрицательное действительное число $\mu(e)$, называемое его **мерой**; мы хотим найти алгоритм построения остовного дерева T, у которого **сумма мер** $M(T) = \Sigma\mu(e)$ имеет минимальное возможное значение (сумма берется по всем ребрам дерева T). Эта задача носит название **задачи о соединении городов** (или **задачи о минимальной связке**). Предыдущая задача получается как частный случай, если положить G равным K_n, а в качестве меры ребра взять расстояние между соответствующей парой городов. Искомый алгоритм, известный под названием **алгоритма Краскала**, дает следующая теорема.

Теорема 11А. *Пусть G — связный граф с n вершинами; тогда следующая процедура приводит к решению задачи о соединении городов:* (i) *выберем ребро e_1, обладающее в G наименьшей мерой;* (ii) *определим по индукции последовательность ребер e_2, e_3, ..., e_{n-1}, выбирая на каждом шаге ребро (отличное от предыдущих) с наименьшей мерой, обладающее тем свойством, что оно не образует циклов с предыдущими ребрами e_i. Полученный подграф T графа G, ребрами которого являются e_1, ..., e_{n-1}, и есть требуемое остовное дерево.*

ком диапазоне областей, как электротехника и лингвистика, исследование операций и кристаллография, вероятность и генетика, социология, география и численный анализ.

Конечно, книга таких размеров не годится для подробного обсуждения многочисленных приложений; поэтому мы отсылаем читателя к прекрасному изложению этого вопроса в гл. 6 книги Басакера и Саати [2]. Здесь мы только напомним читателю некоторые приложения, которые уже встречались в тексте, кратко опишем, что еще имеется в запасе, а затем детально обсудим две частные задачи.

Мы уже видели, как можно использовать графы и орграфы для описания многих ситуаций, включая: *рыночные отношения* (упр. 3f) — здесь использовались двудольные графы, представлявшие различные промышленные предприятия и рынки, на которые поступали их товары; *игры* (упр. 1a (v)) — здесь вершины соответствовали разным стадиям игры, а дуги указывали на возможные ходы; *дружеские отношения* (лемма о рукопожатиях и упр. 1a (iii), 3f, 3j и 7i); *электрические цепи* и *карты дорог* (§ 1); *химические соединения* (§ 10 и упр. 1b и 9c); *головоломки* (второй абзац из § 6 и упр. 6d, 6g, 7d и 7i).

Ниже мы упомянем еще такие приложения, как использование планарных графов при изучении печатных схем (§ 13), применение хроматических многочленов в задачах о составлении расписаний (§ 21) и теории трансверсалей — при построении латинских квадратов и в теории групп (§ 27). Мы обсудим также довольно подробно использование орграфов при изучении цепей Маркова (§ 24) и при решении проблемы нахождения максимальных потоков в транспортных сетях (§ 29).

Оставшаяся часть параграфа посвящена более детальному изучению двух конкретных приложений, одно из которых задача о соединении городов, а второе — гораздо менее серьезная задача.

(i) Представим себе, что мы хотим построить сеть железных дорог, которые соединили бы n данных городов, причем так, чтобы пассажир мог из каждого города проехать в любой другой. Если при этом из экономических соображений требуется, чтобы количество затраченных рельсов было минимальным, то ясно, что граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра — соединяющим их железным дорогам, должен быть деревом. Задача состоит в нахождении алгоритма, определяющего, какое из возможных n^{n-2} деревьев, соединяющих эти города, требует наименьшего количества рельсов, если известны расстояния между каждой парой городов (рис. 11.1).

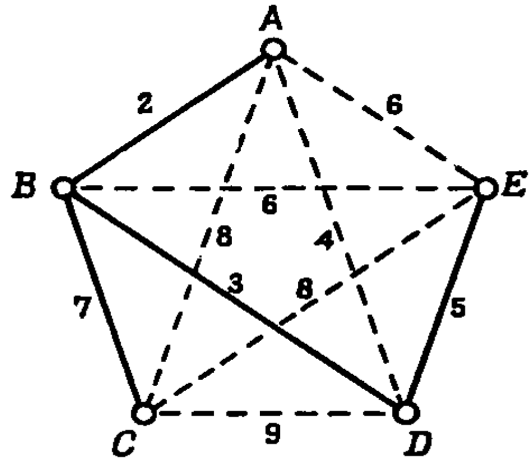

Рис. 11.1.

Можно сформулировать эту задачу в несколько более общем виде на языке теории графов. А именно, пусть G — связный граф, и пусть каждому его ребру e приписано неотрицательное действительное число $\mu(e)$, называемое его **мерой**; мы хотим найти алгоритм построения остовного дерева T, у которого **сумма мер** $M(T) = \Sigma\mu(e)$ имеет минимальное возможное значение (сумма берется по всем ребрам дерева T). Эта задача носит название **задачи о соединении городов** (или **задачи о минимальной связке**). Предыдущая задача получается как частный случай, если положить G равным K_n, а в качестве меры ребра взять расстояние между соответствующей парой городов. Искомый алгоритм, известный под названием **алгоритма Краскала**, дает следующая теорема.

Теорема 11А. *Пусть G — связный граф с n вершинами; тогда следующая процедура приводит к решению задачи о соединении городов:* (i) *выберем ребро e_1, обладающее в G наименьшей мерой;* (ii) *определим по индукции последовательность ребер e_2, e_3, ..., e_{n-1}, выбирая на каждом шаге ребро (отличное от предыдущих) с наименьшей мерой, обладающее тем свойством, что оно не образует циклов с предыдущими ребрами e_i. Полученный подграф T графа G, ребрами которого являются e_1, ..., e_{n-1}, и есть требуемое остовное дерево.*

Замечание. Предлагаем читателю проверить, что описанная процедура, примененная к графу, изображенному на рис. 11.1, дает: $e_1 = AB$, $e_2 = BD$, $e_3 = DE$, $e_4 = BC$.

Доказательство. Тот факт, что T является остовным деревом графа G, сразу следует из утверждения (ii) теоремы 9А; остается только показать, что сумма мер дерева T минимальна. Для этого предположим, что некоторое остовное дерево S графа G обладает тем свойством, что $M(S) < M(T)$. Если e_k — первое ребро описанной выше последовательности, не принадлежащее S, то подграф графа G, образованный добавлением e_k к S, содержит единственный цикл C, проходящий по ребру e_k. Поскольку C содержит ребро e, принадлежащее S, но не T, то подграф, полученный из S заменой e на e_k, по-прежнему является остовным деревом (скажем, S'). По построению $\mu(e_k) \leqslant \mu(e)$, поэтому $M(S') \leqslant M(S)$ и число общих ребер у S' и T на одно больше, чем у S и T. Повторяя шаг за шагом эту процедуру, можно преобразовать S в T, причем сумма мер на каждом шаге не увеличивается; следовательно, $M(T) \leqslant M(S)$, и мы получаем требуемое противоречие. //

Задачу о соединении городов напоминает известная **задача о коммивояжере**, в которой требуется найти алгоритм для решения следующей задачи: коммивояжер желает посетить n определенных городов; как он должен двигаться, чтобы заехать в каждый из них хотя бы один раз, проделав путь наименьшей общей длины? (На рис. 11.1 кратчайшим является путь $A \to B \to D \to E \to C \to A$; при этом пройденное расстояние равно 26.) Несмотря на многочисленные практические применения этой задачи, общий алгоритм ее решения до сих пор, к сожалению, неизвестен.

(ii) В последнее время стала популярной головоломка, названная «мгновенное помешательство». Она состоит из четырех кубиков, грани которых раскрашены в красный, синий, зеленый и желтый цвета, причем каждый куб имеет хотя бы одну грань каждого цвета (как на рис. 11.2). Требуется поставить эти кубы друг на друга так, чтобы каждая из четырех боковых граней размера 4×1 получившейся прямоугольной призмы была окрашена в каждый из четырех цветов.

Чтобы решить эту задачу, представим каждый куб графом с четырьмя вершинами, по одной на каждый цвет. Во всех таких графах две вершины смежны тогда и только тогда, когда в рассматриваемом кубе две противоположные

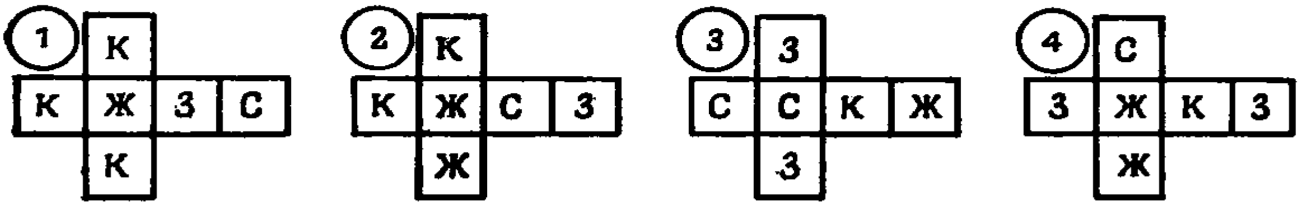

Рис. 11.2.

грани раскрашены в соответствующие цвета. Графы, соответствующие кубам, изображенным на рис. 11.2, показаны на рис. 11.3.

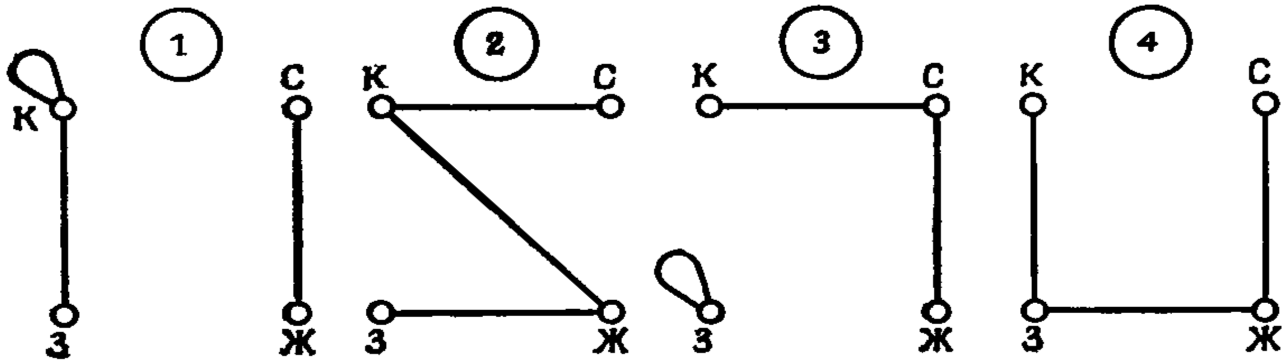

Рис. 11.3.

Удобно наложить все эти графы один на другой и образовать из них новый граф G (рис. 11.4). Так как в любом решении головоломки на каждой из двух пар противоположных боковых граней призмы имеются две грани куба каждого цвета, то нетрудно видеть, что искомое решение получается следующим образом: находим два реберно-непересекающихся подграфа H_1 и H_2 графа G, являющихся регулярными степени 2 и содержащих по одному ребру каждого номера (нашему частному случаю соответствуют подграфы, изображенные на рис. 11.5). Тогда H_1 и H_2 задают цвета, расположенные на передней-задней и левой-правой боковых гранях призмы. Таким образом, решение может быть получено с помощью этих подграфов (рис. 11.6).

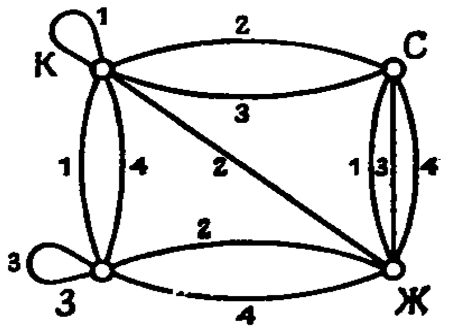

Рис. 11.4.

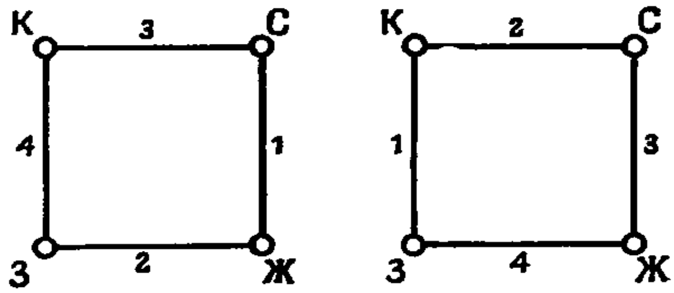

Рис. 11.5.

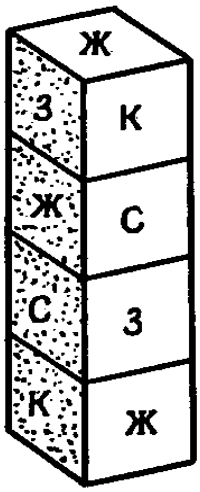

Рис. 11.6.

УПРАЖНЕНИЯ

(11a) Применяя процедуру, указанную в теореме 11A, найдите остовное дерево с минимально возможной суммой мер для графа, изображенного на рис. 11.7.

(11b) Найдите какой-нибудь другой алгоритм для решения задачи о соединении городов, включающий удаление из графа G ребер самой большой меры. Покажите, что если меры всех ребер

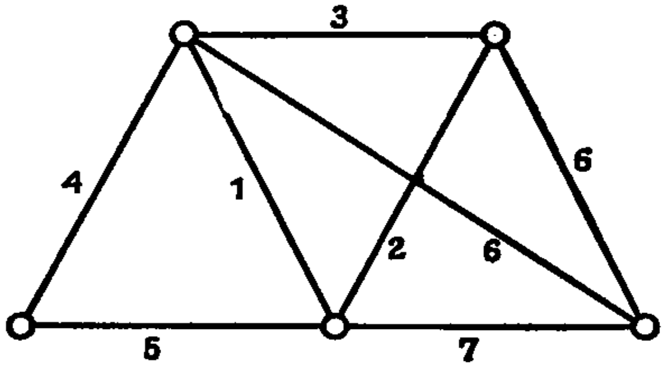

Рис. 11.7.

совпадают, то этот алгоритм дает метод построения остовного дерева графа G.

(*11c) Примените теорему 11А для доказательства того, что если V — конечномерное векторное пространство, то любые два его базиса состоят из одного и того же числа элементов.

(*11d) Предположим, что в задаче о коммивояжере все n городов расположены в квадрате со стороной k. Разбивая этот квадрат на m параллельных узких полос, покажите, что весь пройденный путь может не превосходить $k(m+3+[n/m])$. Подобрав подходящее m, покажите, что (при возрастании n) это расстояние асимптотически не превосходит $2k\sqrt{n}$.

(11e) Покажите, что в задаче о раскрашенных кубиках существует 41 472 различных способа составить прямоугольную призму 4×1 и что в нашем частном примере только один из этих способов дает решение задачи.