РАЗДЕЛ 4.1

1. $(1010)_{-2}$, $(1011)_{-2}$, $(1000)_{-2}$, $\ldots$, $(11000)_{-2}$, $(11001)_{-2}$, $(11110)_{-2}$.

2. (a) $-(110001)_2$, $-(11.001001001001\ldots)_2$, $-(11.0010010000111110110101\ldots)_2$.
(b) $(11010011)_{-2}$, $(1101.001011001011\ldots)_{-2}$, $(111.011001000100000101\ldots)_{-2}$.
(c) $(\bar{1}11\bar{1}\bar{1})_3$, $(\bar{1}0.0\bar{1}\bar{1}0110\bar{1}\bar{1}011\ldots)_3$, $(10.011\bar{1}111\bar{1}000\bar{1}011\bar{1}1101\bar{1}1111110\ldots)_3$.
(d) $-(9.4)_{1/10}$, $-(\ldots 7582417582413)_{1/10}$, $(\ldots 3462648323979853562951413)_{1/10}$.

3. $(1010113.2)_{2i}$.

4. (a) Между rA и rX. (b) У остатка в регистре rX разделяющая точка находится между байтами 3 и 4; у частного в регистре rA разделяющая точка расположена на один байт правее младшего разряда регистра.

5. Представление в обратном коде получается путем вычитания из $999\ldots 9 = 10^p - 1$, вместо вычитания из $1000\ldots 0 = 10^p$.

6. (a, c) $2^{p-1} - 1$, $-(2^{p-1} - 1)$; (b) $2^{p-1} - 1$, -2^{p-1}.

7. Представление в дополнительном коде для отрицательного числа x может быть получено, если взять число $10^n + x$ (n достаточно велико, чтобы число было положительным) и продолжить его влево при помощи бесконечного количества девяток. Представление в обратном коде можно получить обычным способом. (Эти два представления совпадают для бесконечных десятичных дробей, в противном случае представление в обратном коде имеет вид $\ldots(a)99999\ldots$, а представление в дополнительном коде — $\ldots(a+1)0000\ldots$.) Данные представления имеют смысл, если считать, что значение бесконечной суммы $N = 9 + 90 + 900 + 9000 + \cdots$ равно -1, поскольку $N - 10N = 9$.

См. также упр. 31, в котором рассматриваются системы p-адических чисел. Для чисел, представление которых по основанию p конечно, p-адическое представление совпадает с рассмотренным здесь представлением в дополнительном коде, но между полем p-адических чисел и полем вещественных чисел не существует никакой прямой связи.

8. $\sum_j a_j b^j = \sum_j (a_{kj+k-1} b^{k-1} + \cdots + a_{kj}) b^{kj}$.

9. `A BAD ADOBE FACADE FADED`. [*Примечание.* Вот другие "числовые фразы": `DO A DEED A DECADE`; `A CAD FED A BABE BEEF`, `COCOA`, `COFFEE`; `BOB FACED A DEAD DODO`.]

10.
$$\begin{bmatrix} \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0;\ a_{-1}, a_{-2}, \ldots \\ \ldots, b_3, b_2, b_1, b_0;\ b_{-1}, b_{-2}, \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots, A_3, A_2, A_1, A_0;\ A_{-1}, A_{-2}, \ldots \\ \ldots, B_3, B_2, B_1, B_0;\ B_{-1}, B_{-2}, \ldots \end{bmatrix}, \quad \text{если}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{k_{j+1}-1}, a_{k_{j+1}-2}, \ldots, a_{k_j} \\ b_{k_{j+1}-2}, \ldots, b_{k_j} \end{bmatrix}, \qquad B_j = b_{k_{j+1}-1} \ldots b_{k_j},$$

где $\langle k_n \rangle$ — произвольная бесконечная последовательность целых чисел, удовлетворяющих неравенствам $k_{j+1} > k_j$.

11. (Описываемый ниже алгоритм выполняет как сложение, так и вычитание в зависимости от выбора знака "плюс" или "минус".)

Сначала устанавливается $k \leftarrow a_{n+1} \leftarrow a_{n+2} \leftarrow b_{n+1} \leftarrow b_{n+2} \leftarrow 0$; затем для $m = 0, 1, \ldots, n+2$ выполняется следующее: устанавливается $c_m \leftarrow a_m \pm b_m + k$; далее, если $c_m \ge 2$, устанавливается $k \leftarrow -1$ и $c_m \leftarrow c_m - 2$; если $c_m < 0$, устанавливается $k \leftarrow 1$ и $c_m \leftarrow c_m + 2$; а если $0 \le c_m \le 1$, то устанавливается $k \leftarrow 0$.

12. (a) Вычесть $\pm(\ldots a_3 0 a_1 0)_{-2}$ из $\pm(\ldots a_4 0 a_2 0 a_0)_{-2}$ в негадвоичной системе.
(В упр. 7.1–18 приводится оригинальное решение задачи, полученное с использованием битовых операций над полным словом.)

(b) Вычесть $(\ldots b_3 0 b_1 0)_2$ из $(\ldots b_4 0 b_2 0 b_0)_2$ в двоичной системе.

13. $(1.909090\ldots)_{-10} = (0.090909\ldots)_{-10} = \frac{1}{11}$.

14.

$$\begin{array}{ccccccccc l}
 & & & & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & \quad [5-4i] \\
 & & & & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & \quad [5-4i] \\ \cline{5-9}
 & & & & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & \\
 & & & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & & \\
 & & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & & & \\
 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 1 & 3 & 2 & 1 & & & & & \\ \hline
0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & \quad [9-40i]
\end{array}$$

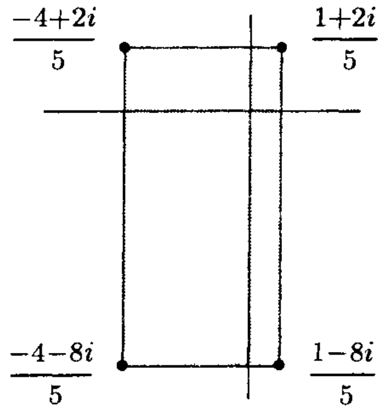

Рис. А–6. Фундаментальная область для мнимочетверичных чисел.

15. $[-\frac{10}{11} \,..\, \frac{1}{11}]$ и прямоугольник справа (рис А-6).

16. Соблазнительно попробовать сделать это самым простым способом, предписав реализацию переносов по правилу $2 = (1100)_{i-1}$, но это приведет к непрекращающейся процедуре (зацикливанию) при попытке добавления единицы к числу $(11101)_{i-1} = -1$.

В приведенном ниже решении предлагаются четыре алгоритма (для сложения и вычитания 1 и i). Если α — строка из нулей и единиц, то полагается, что α^P — такая строка из нулей и единиц, что $(\alpha^P)_{i-1} = (\alpha)_{i-1} + 1$. Аналогичным образом определяются α^{-P}, α^Q, α^{-Q} путем замещения $+1$ соответственно на -1, $+i$ и $-i$. Тогда

$$(\alpha 0)^P = \alpha 1; \qquad (\alpha x1)^P = \alpha^Q x0. \qquad (\alpha 0)^Q = \alpha^P 1; \qquad (\alpha 1)^Q = \alpha^{-Q} 0.$$
$$(\alpha x0)^{-P} = \alpha^{-Q} x1; \qquad (\alpha 1)^{-P} = \alpha 0. \qquad (\alpha 0)^{-Q} = \alpha^Q 1; \qquad (\alpha 1)^{-Q} = \alpha^{-P} 0.$$

Здесь x означает 0 или 1 и цепочки при необходимости дополняются слева нулями. Все эти процедуры очевидным образом заканчиваются. Таким образом, любое число вида $a + bi$ с целыми a и b представимо в системе по основанию $i - 1$.

17. Нет (вопреки упр. 28); число -1 не представимо в этой системе. Это можно доказать, построив соответствующее множество S, как на рис. 1. Имеем представления $-i = (0.1111\ldots)_{1+i}$, $i = (100.1111\ldots)_{1+i}$.

18. Пусть S_0 — множество точек $(a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0)_{i-1}$, в котором каждое a_k есть 0 или 1. (Поэтому множество S_0 состоит из 256 внутренних точек, отмеченных на рис. 1, после 16-кратного увеличения.) Покажем сначала, что множество S замкнутое. Пусть $y_1, y_2, \ldots$ — произвольная последовательность точек множества S. Имеется

$$y_n = \textstyle\sum_{k\ge1} a_{nk} 16^{-k},$$

где каждое a_{nk} принадлежит S_0. Построим дерево, вершинами которого будут наборы $(a_{n1}, \ldots, a_{nr})$ для $1 \le r \le n$, причем одна вершина является родителем, если она является по отношению к этой вершине начальным поднабором. Согласно теореме о бесконечных деревьях (теорема 2.3.4.3K) это дерево имеет бесконечный путь $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$; соответственно $\sum_{k\ge1} a_k 16^{-k}$ есть предельная точка множества $\{y_1, y_2, \ldots\}$, принадлежащая S.

В соответствии с ответом к упр. 16 все числа вида $(a+bi)/16^k$ представимы, если a и b целые. Поэтому при действительных x и y и $k \ge 1$ число $z_k = (\lfloor 16^k x\rfloor + \lfloor 16^k y\rfloor i)/16^k$ для некоторых целых m и n принадлежит $S + m + ni$. Можно показать, что всякая представимая точка вне S должна принадлежать множеству $S + m + ni$ при $(m, n) \ne (0, 0)$. Соответственно, если $|x|$ и $|y|$ фиксированы и k достаточно велико, получаем, что $z_k \in S$ и $\lim_{k\to\infty} z_k = x + yi$ принадлежит множеству S.

[B. Мандельброт (B. Mandelbrot) назвал множество S двуглавым драконом, подметив, что оно, по существу, формируется путем объединения двух "кривых дракона" (см. книгу

Fractals: Form, Chance, and Dimension (San Francisco: Freeman, 1977), 313–314, в которой Мандельброт установил, что размерность границы равна $2\lg x \approx 1.523627$, где $x = 1 + 2x^{-2} \approx 1.69562$. Другие свойства кривой дракона описаны в статье C. Davis and D. E. Knuth *J. Recr. Math.* **3** (1970), 66–81, 133–149. Множества S систем счисления по основаниям $\{0, 1\}$ и другим комплексным основаниям построены и проанализированы Д. Гоффином (D. Goffinet) в *AMM* **98** (1991), 249–255.]

В статье I. Kátai and J. Szabó, *Acta Scient. Math.* **37** (1975), 255–260, показано, что основание $-d+i$ приводит к системам счисления с цифрами $\{0, 1, \ldots, d^2\}$. Другие свойства таких систем исследовались У. Дж. Гильбертом (W. J. Gilbert) в *Canadian J. Math.* **34** (1982), 1335–1348; *Math. Magazine* **57** (1984), 77–81. В. Нортон (V. Norton) предложил еще одну интересную систему счисления по основанию $2 + i$ с цифрами $\{0, 1, i, -1, -i\}$ [*Math. Magazine* **57** (1984), 250–251]. С системами счисления, основанными на более общих целых числах, можно ознакомиться в работах I. Kátai and B. Kovács, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **37** (1981), 159–164, 405–407; *Acta ath. Hung.* **58** (1991), 113–120; A. Pethő, *Studia Scient. Math. Hung.* **27** (1992), 169–172.

19. Если $m > u$ или $m < l$, то найдем такое $a \in D$, что $m \equiv a$ (по модулю b); искомое представление будет представлением $m' = (m - a)/b$, за которым следует a. Заметим, что $m > u$ принадлежит интервалу $l < m' < m$; $m < l$ принадлежит $m < m' < u$, поэтому алгоритм конечен.

[При $b = 2$ решения нет. Представление будет единственным тогда и только тогда, когда $0 \in D$; неоднозначное представление появится, например, когда $D = \{-3, -1, 7\}$, $b = 3$, так как $(\alpha)_3 = (\bar{3}77\bar{3}\alpha)_3$. Нетрудно показать, что при $b \geq 3$ имеется точно 2^{b-3} решающих множеств D, в которых $|a| < b$ для всех $a \in D$. Далее, множество $D = \{0,\ 1,\ 2 - \epsilon_2 b^n,\ 3 - \epsilon_3 b^n,\ \ldots,\ b - 2 - \epsilon_{b-2} b^n,\ b - 1 - b^n\}$ порождает единственное представление для всех $b \geq 3$ и $n \geq 1$, где любое ϵ_j есть 0 или 1. См. *Proc. IEEE Symp. Comp. Arith.* **4** (1978), 1–9; *JACM* **29** (1982), 1131–1143.]

20. (a) $0.\bar{1}\bar{1}\bar{1}\ldots = \bar{1}.888\ldots = \bar{1}8.\frac{111}{777}\ldots = \bar{1}8\frac{1}{7}.\frac{222}{666}\ldots = \cdots = \bar{1}8\frac{123456}{765432}.\frac{777}{111}\ldots$ имеет девять представлений. (b) D — дробная часть $.a_1a_2\ldots$, которая всегда принимает значения между $-1/9$ и $+71/9$. Пусть x имеет десять или более D — десятичных представлений. Тогда для достаточно большого k число $10^k x$ имеет десять представлений, отличающихся цифрами, которые расположены левее десятичной точки: $10^k x = n_1 + f_1 = \cdots = n_{10} + f_{10}$, где любое f_j есть D — дробная часть. Ввиду единственности представления целых чисел числа n_j различны, скажем, $n_1 < \cdots < n_{10}$; следовательно, $n_{10} - n_1 \geq 9$, но это число принадлежит интервалу $f_1 - f_{10} \geq 9 > 71/9 - (-1/9)$. Таким образом, мы пришли к противоречию, что и доказывает справедливость утверждения. (c) Любое число вида $0.a_1a_2\ldots$, где любое a_j есть -1 или 8, равно $\bar{1}.a_1'a_2'\ldots$ при $a_j' = a_j + 9$ (более того, оно имеет *еще* 6 представлений $\bar{1}8.a_1''a_2''\ldots$ и т. д.).

21. Такое представление можно получить, используя метод, аналогичный предложенному в тексте раздела для перевода в уравновешенную троичную систему счисления.

В отличие от систем, рассмотренных в упр. 20, нуль может быть представлен бесчисленным количеством способов, которые получаются в результате умножения на степень десять суммы $\frac{1}{2} + \sum_{k\geq 1}(-4\frac{1}{2}) \cdot 10^{-k}$ (или из такого же представления, но с противоположными знаками цифр). Представлениями единицы служат $1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}^*$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}^*$, $5 - 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}^*$, $5 - 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}^*$, $50 - 45 - 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}^*$, $50 - 45 - 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}^*$ и др., где $\pm\frac{1}{2}^* = (\pm 4\frac{1}{2})(10^{-1} + 10^{-2} + \cdots)$. [*AMM* **57** (1950), 90–93.]

22. Полагая, что имеется приближение $b_n \ldots b_1 b_0$ с погрешностью $\sum_{k=0}^{n} b_k 10^k - x > 10^{-t}$, где $t > 0$, покажем, как уменьшить ошибку примерно в 10^{-t} раз. (Процесс может быть начат с любого приближения, для которого $\sum_{k=0}^{n} b_k 10^k > x$; далее через конечное количество итераций ошибка станет меньше ϵ.) Просто выбираем $m > n$ настолько большим, чтобы десятичное представление числа $-10^m\alpha$ имело единицу в позиции 10^{-t} и не имело единиц в позициях $10^{-t+1}, 10^{-t+2}, \ldots, 10^n$. Тогда $10^m\alpha +$ (некоторая подходящая сумма степеней 10 между 10^m и 10^n) $+ \sum_{k=0}^{n} b_k 10^k \approx \sum_{k=0}^{n} b_k 10^k - 10^{-t}$.

23. Пусть множество $S = \{\sum_{k\geq 1} a_k b^{-k} \mid a_k \in D\}$ замкнуто (как в упр. 18), следовательно, оно измеримо. Так как $bS = \bigcup_{a\in D}(a+S)$, имеем $b\mu(S) = \mu(bS) \leq \sum_{a\in D}\mu(a+S) = \sum_{a\in D}\mu(S) = b\mu(S)$, и поэтому должно быть справедливо $\mu((a+S)\cap(a'+S)) = 0$, если $a \neq a' \in D$. Тогда множество T — множество меры нуль, если $0 \in D$, так как множество T является объединением множеств вида $b^k(n + ((a+S)\cap(a'+S)))$, $a \neq a'$, каждое из которых — меры нуль. С другой стороны, как отмечал К. А. Брэкк (K. A. Brakke), каждое вещественное число (в системе счисления, рассмотренной в упр. 21) имеет бесконечное количество представлений.

[Множество T не может быть пустым, поэтому вещественные числа не могут быть записаны как счетное объединение замкнутых, разомкнутых и граничных множеств (см. *AMM* **84** (1977), 827–828; более детальный анализ приводится в работе Petkovšek, *AMM* **97** (1990), 408–411). Если множество D состоит из элементов, меньших b, то множество представлений чисел по основанию b и цифры из множества D имеют меру нуль. Если множество D состоит из элементов, бо́льших, чем b, и из вещественных чисел, то оно имеет бесконечную меру.]

24. $\{2a\cdot 10^k + a' \mid 0 \leq a < 5, 0 \leq a' < 2\}$ или $\{5a'\cdot 10^k + a \mid 0 \leq a < 5, 0 \leq a' < 2\}$ для $k \geq 0$. [Р. Л. Грэхэм (R. L. Graham) показал, что не существует другого множества целых цифр, удовлетворяющих этим свойствам. Эндрю Одлыжко (Andrew Odlyzko) доказал, что ограничение в рассмотрении множеств целых чисел излишне в том смысле, что если два наименьших элемента множества D являются 0 и 1, то все цифры должны быть целыми.

Доказательство. Пусть $S = \{\sum_{k<0} a_k b^k \mid a_k \in D\}$ — множество "дробных частей" и пусть $X = \{(a_n \ldots a_0)_b \mid a_k \in D\}$ — множество "полных чисел". Тогда $[0\,.\,.\,\infty) = \bigcup_{x\in X}(x+S)$ и $(x+S)\cap(x'+S)$ при $x \neq x' \in X$ имеет меру нуль. Получим $(0\,.\,.\,1) \subseteq S$ и докажем индукцией по m, что $(m\,.\,.\,m+1) \subseteq x_m + S$ для некоторого $x_m \in X$. Пусть $x_m \in X$ таково, что для любого $\epsilon > 0$ мера $(m\,.\,.\,m+\epsilon)\cap(x_m+S)$ положительна. Тогда $x_m \leq m$ и x_m должно быть целым независимо от величины перекрытия множеством $x_{\lfloor x_m\rfloor} + S$ множества $x_m + S$. Если $x_m > 0$, то из того, что $(m - x_m\,.\,.\,m - x_m + 1)\cap S$ имеет положительную меру, по индукции следует, что эта мера равна 1 и $(m\,.\,.\,m+1) \subseteq x_m + S$, так как множество S замкнутое. При $x_m = 0$ и $(m\,.\,.\,m+1) \not\subseteq S$ мы должны получить $m < x'_m < m+1$ для любого $x'_m \in X$, где $(m\,.\,.\,x'_m) \subseteq S$; но тогда $1+S$ перекрывает $x'_m + S$. (См. *Proc. London Math. Soc.* (3) **18** (1978), 581–595.)]

Примечание. Если снять ограничение $0 \in D$, *возникнет* много других достаточно интересных ситуаций, в частности $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $\{1,2,3,4,5,51,52,53,54,55\}$ и $\{2,3,4,5,6,52,53,54,55,56\}$. Если же допустить наличие отрицательных цифр, то при помощи метода, описанного в упр. 19, можно найти много других решений задачи, а также множества, содержащие необычные числа наподобие $\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7,18\}$, которые не удовлетворяют оговоренным условиям. Появляются предпосылки для поиска изящных решений для множеств с отрицательными цифрами.

25. Положительное число, представление которого по основанию b содержит m последовательных цифр $(b-1)$, расположенных справа от разделяющей точки, должно иметь вид $c/b^n + (b^m - \theta)/b^{n+m}$, где c и n — неотрицательные целые числа и $0 < \theta \leq 1$. Поэтому, если u/v имеет такой вид, значит, равенство $b^{m+n}u = b^m cv + b^m v - \theta v$ выполнено. Следовательно, θv есть целое число, кратное b^m. Однако $0 < \theta v \leq v < b^m$. (При $0 \leq a < b-1$ могут встречаться произвольно длинные ряды цифр $aaaaa$, например, в представлении чисел $a/(b-1)$.)

26. Доказательство достаточности получается непосредственным обобщением на случай основания b обычного доказательства. Доказательство необходимости разбивается на две части. Если для некоторого n число β_{n+1} больше $\sum_{k\le n} c_k\beta_k$, то для малых ϵ число $\beta_{n+1}-\epsilon$ не допускает такого представления. Если $\beta_{n+1} \le sum_{k\le n} c_k\beta_k$ для всех n, но равенство выполняется не всегда, то можно показать, что для некоторого x существуют два представления (см. *Transactions of the Royal Society of Canada*, series III, **46** (1952), 45–55).

27. Доказательство выполняется индукцией по n. Если n четно, то должно быть $e_0 > 0$ и искомый результат получается по индукции, так как $n/2$ имеет единственное представление такого типа. Если n нечетно, то должно быть $e_0 = 0$ и задача сводится к представлению числа $-(n-1)/2$. Если это последнее равно либо 0, либо 1, то, очевидно, существует только один способ решения задачи. В противном случае по индукции доказывается, что число имеет единственное представление.

[Отсюда следует, что любое положительное целое число имеет ровно *два* таких представления с убывающим порядком $e_0 > e_1 > \cdots > e_t$: одно — с четным t, другое — с нечетным t.]

28. Доказательство может быть выполнено, как и в упр. 27. Обратите внимание, что $a+bi$ представляет собой произведение $1+i$ и некоторого комплексного целого числа тогда и только тогда, когда $a+b$ четное. Такое представление неявно связано с "кривой дракона", описанной в ответе к упр. 18.

29. Достаточно доказать, что любую совокупность $\{T_0, T_1, T_2, \ldots\}$, удовлетворяющую свойству B, можно получить с помощью "стягивания" некоторой совокупности $\{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$, где $S_0 = \{0, 1, \ldots, b-1\}$, и что все элементы множеств S_1, S_2, … кратны b.

При доказательстве последнего утверждения можно считать, что $1 \in T_0$ и существует наименьший элемент $b > 1$, такой, что $b \notin T_0$. Индукцией по n докажем, что если $nb \notin T_0$, то $nb+1$, $nb+2$, …, $nb+b-1$ не принадлежат никакому из множеств T_j; если же $nb \in T_0$, то же самое верно и для чисел $nb+1$, …, $nb+b-1$. Тогда искомой совокупностью будет $S_1 = \{nb \mid nb \in T_0\}$, $S_2 = T_1$, $S_3 = T_2$ и т. д., откуда следует результат.

Если $nb \notin T_0$, то $nb = t_0 + t_1 + \cdots$, где t_1, t_2, … кратны b. Следовательно, $t_0 < nb$ кратно b. По индукции $(t_0+k)+t_1+t_2+\cdots$ есть представление числа $nb+k$ при $0 < k < b$, поэтому $nb+k \notin T_j$ для любого j.

Если $nb \in T_0$ и $0 < k < b$, то $t_0+t_1+\cdots$. Равенство $t_j = nb+k$ не может выполняться для $j \ge 1$, иначе $nb+b$ имело бы два представления $(b-k)+\cdots+(nb+k)+\cdots = (nb)+\cdots+b+\cdots$. По индукции $t_0 \bmod b = k$. Из представления $nb = (t_0-k)+t_1+\cdots$ следует $t_0 = nb+k$.

[См. *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3) **4** (1956), 15–17. Конечный результат получен Р. А. Мак-Магоном (P. A. MacMahon), *Combinatory Analysis* **1** (1915), 217–223.]

30. (a) Пусть A_j — множество чисел n, в представлении которых не содержится b_j; тогда согласно свойству единственности $n \in A_j$ тогда и только тогда, когда $n + b_j \notin A_j$. Следовательно, $n \in A_j$ тогда и только тогда, когда $n + 2b_jb_k \in A_j \cap A_k$. Пусть m — количество целых чисел $n \in A_j \cap A_k$, таких, что $0 \le n < 2b_jb_k$. Значит, в том же интервале найдется ровно m целых чисел, принадлежащих A_j, но не принадлежащих A_k, и ровно m, не принадлежащих ни A_j, ни A_k; поэтому $4m = 2b_jb_k$. Следовательно, b_j и b_k не могут быть нечетными одновременно. Однако одно из них, разумеется, нечетно, так как нечетные числа допускают представление в бинарном базисе.

(b) Согласно п. (a) можно так перенумеровать числа b, чтобы b_0 было нечетным, а b_1, b_2, … — четными. Тогда ряд $\frac{1}{2}b_1$, $\frac{1}{2}b_2$, … должен также образовывать базис и эту процедуру можно повторить.

(c) Если имеется бинарный базис, то для представления числа $\pm 2^n$ (для больших n) при достаточно больших k необходимо получить и положительные, и отрицательные d_k. Доказательство обратного утверждения приводится в следующем алгоритме.

S1. [Начальная установка.] Установить $k \leftarrow 0$.

S2. [Выполнить?] Если $n = 0$, завершить выполнение алгоритма.

S3. [Выбрать.] Если число n четное, установить $n \leftarrow n/2$; иначе — включить в представление $2^k d_k$ и установить $n \leftarrow (n - d_k)/2$.

S4. [Увеличить k.] Увеличить k на 1 и перейти к шагу S2. ▌

На шаге S3 приведенного алгоритма $|n|$ уменьшается до тех пор, пока не выполнится равенство $n = -d_k$; следовательно, алгоритм должен завершиться.

(d) Две итерации шагов S2–S4 алгоритма приводят к преобразованию $4m \to m$, $4m + 1 \to m + 5$, $4m + 2 \to m + 7$, $4m + 3 \to m - 1$. Рассуждая, как в упр. 19, остается только показать, что алгоритм завершит работу при $-2 \le n \le 8$; все остальные значения числа n сдвигаются в этот интервал. Для данного интервала имеем следующую структуру дерева: $3 \to -1 \to -2 \to 6 \to 8 \to 2 \to 7 \to 0$ и $4 \to 1 \to 5 \to 6$. Таким образом, $1 = 7 \cdot 2^0 - 13 \cdot 2^1 + 7 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2^3 - 13 \cdot 2^5 - 13 \cdot 2^9 + 7 \cdot 2^{10}$.

Примечание. Выбор d_0, d_1, d_2, $\ldots = 5, -3, 3, 5, -3, 3, \ldots$ также дает бинарный базис. Более подробно с этим вопросом можно ознакомиться в работах *Math. Comp.* **18** (1964), 537–546; A. D. Sands, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957), 65–86.

31. (См. относящиеся к этому вопросу упр. 3.2.2–11, 4.3.2–13, 4.6.2–22.)

(a) Умножая числитель и знаменатель на подходящую степень 2, можно полагать, что $u = (\ldots u_2 u_1 u_0)_2$ и $v = (\ldots v_2 v_1 v_0)_2$, где $v_0 = 1$, являются 2-адическими целыми числами. Для определения w можно прибегнуть к следующему вычислительному методу, используя для целого числа $(u_{n-1} \ldots u_0)_2 = u \bmod 2^n$ обозначение $u^{(n)}$ $(n > 0)$.

Пусть $w_0 = u_0$ и $w^{(1)} = w_0$. Для $n = 1, 2, \ldots$ полагаем, что найдено целое число $w^{(n)} = (w_{n-1} \ldots w_0)_2$, такое, что $u^{(n)} \equiv v^{(n)} w^{(n)}$ (по модулю 2^n). Тогда $u^{(n+1)} \equiv v^{(n+1)} w^{(n)}$ (по модулю 2^n). Поэтому можно положить $w_n = 0$ или 1 в соответствии с тем, чему равно число $(u^{(n+1)} - v^{(n+1)} w^{(n)}) \bmod 2^{n+1}$: нулю или 2^n.

(b) Найдем наименьшее целое число k, такое, что $2^k \equiv 1$ (по модулю $2n + 1$). Тогда $1/(2n + 1) = m/(2^k - 1)$ для некоторого целого числа m, $1 \le m < 2^{k-1}$. Пусть α есть k-разрядное двоичное представление для m; тогда в двоичной системе число $(0.\alpha\alpha\alpha\ldots)_2$, умноженное на $2n + 1$, равно $(0.111\ldots)_2 = 1$, а в 2-адической системе $(\ldots\alpha\alpha\alpha)_2$, умноженное на $2n + 1$, равно $(\ldots 111)_2 = -1$.

(c) Если u рационально, скажем, $u = m/(2^e n)$, где n — нечетное и положительное число, то 2-адическое представление числа u периодично, так как множество чисел с периодическим разложением содержит $-1/n$ и замкнуто относительно операций изменения знака, деления на 2 и сложения. Наоборот, если для всех $N \ge \mu$ соблюдается $u_{N+\lambda} = u_N$, то 2-адическое представление числа $(2^\lambda - 1)2^{-\mu} u$ есть целое число.

(d) Квадрат любого числа вида $(\ldots u_2 u_1 1)_2$ имеет вид $(\ldots 001)_2$, поэтому сформулированное условие является необходимым. Достаточность доказывается наличием следующей процедуры вычисления $v = \sqrt{n}$ для случая, когда $n \bmod 8 = 1$.

H1. [Начальная установка.] Установить $m \leftarrow (n - 1)/8$, $k \leftarrow 2$, $v_0 \leftarrow 1$, $v_1 \leftarrow 0$, $v \leftarrow 1$. (При выполнении этого алгоритма получим $v = (v_{k-1} \ldots v_1 v_0)_2$ и $v^2 = n - 2^{k+1} m$.)

H2. [Преобразования.] Если m четно, установить $v_k \leftarrow 0$, $m \leftarrow m/2$. В противном случае установить $v_k \leftarrow 1$, $m \leftarrow (m - v - 2^{k-1})/2$, $v \leftarrow v + 2^k$.

H3. [Приращение k.] Увеличить k на 1 и вернуться к шагу H2. ▌

32. Более общий результат опубликован в журнале *Math. Comp.* **29** (1975), 84–86.

33. Пусть K_n — множество всех таких n-разрядных чисел, что $k_n = |K_n|$. Если множества S и T являются произвольными конечными множествами целых чисел, можно утверждать, что для некоторого целого числа x $S \sim T$ при $S = T + x$, и можно записать $k_n(S) = |K_n(S)|$, где $K_n(S)$ — семейство всех подмножеств K_n, принадлежащих $\sim S$. При $n = 0$ выполняется

$k_n(S) = 0$, однако $|S| \le 1$, так как нуль является единственным 0-разрядным числом. При $n \ge 1$ и $S = \{s_1, \ldots, s_r\}$ имеем

$$\mathcal{K}_n(S) = \bigcup_{0 \le j < b} \; \bigcup_{(a_1,\ldots,a_r)} \{\{t_1 b + a_1, \ldots, t_r b + a_r\} \mid \{t_1, \ldots, t_r\} \in K_{n-1}(\{(s_i + j - a_i)/b \mid 1 \le i \le r\})\},$$

где внутреннее объединение представляет собой полные последовательности цифр $(a_1, \ldots, a_r)$, удовлетворяющих условию $a_i \equiv s_i + j$ (по модулю b) при $1 \le i \le r$. Потребуем для однозначности определения индексов в этой формуле, чтобы $t_i - t_{i'} = (s_i - a_i)/b - (s_{i'} - a_{i'})/b$ при $1 \le i < i' \le r$. Согласно принципу включения и исключения получаем $k_n(S) = \sum_{0 \le j < b} \sum_{m \ge 1} (-1)^{m-1} f(S, m, j)$, где $f(S, m, j)$ — количество множеств целых чисел, которые могут быть выражены в виде $\{t_1 b + a_1, \ldots, t_r b + a_r\}$ описанным выше способом применительно к m различным последовательностям $(a_1, \ldots, a_r)$, причем выражение суммируется по всем выборкам из m различных последовательностей $(a_1, \ldots, a_r)$. Для полученных m различных последовательностей $(a_1^{(l)}, \ldots, a_r^{(l)})$ при $1 \le l \le m$ количество таких множеств равно $k_{n-1}(\{(s_i + j - a_i^{(l)})/b \mid 1 \le i \le r, 1 \le l \le m\})$. Итак, имеем набор множеств $\mathcal{T}(S)$, таких, что

$$k_n(S) = \sum_{T \in \mathcal{T}(S)} c_T \, k_{n-1}(T),$$

где каждое c_T есть целое число. Более того, если множество $T \in \mathcal{T}(S)$, то его элементы близки к элементам множества S и имеем

$$\min T \ge (\min S - \max D)/b \qquad \text{и} \qquad \max T \le (\max S + b - 1 - \min D)/b.$$

Таким образом, получены рекуррентные соотношения для последовательностей множеств $\langle k_n(S) \rangle$, в которых множество S порождает подмножества целых чисел $[l \,..\, u + 1]$ (в обозначениях упр. 19). Последовательность $\langle k_n \rangle$ появляется в процессе формирования этих рекуррентных соотношений, так как $k_n = k_n(S)$ для любого элемента множества S. Коэффициенты c_T могут быть вычислены через несколько начальных значений $k_n(S)$, так что можно получить систему уравнений для определения производящих функций $k_S(z) = \sum k_n(S) z^n = [|S| \le 1] + z \sum_{T \in \mathcal{T}(S)} c_T k_T(z)$ (см. *J. Algorithms* **2** (1981), 31–43).

Например, при $D = \{-1, 0, 3\}$ и $b = 3$ имеем $l = -\frac{3}{2}$ и $u = \frac{1}{2}$, так что искомыми множествами S являются $\{0\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 1\}$ и $\{-1, 0, 1\}$. Соответствующие соотношения для $n \le 3$ имеют вид $\langle 1, 3, 8, 21 \rangle$, $\langle 0, 1, 3, 8 \rangle$, $\langle 0, 0, 1, 4 \rangle$ и $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$. Итак, получено

$$k_0(z) = 1 + z(3k_0(z) - k_{01}(z)), \qquad k_{02}(z) = z(k_{01}(z) + k_{02}(z)),$$
$$k_{01}(z) = z k_0(z), \qquad k_{012}(z) = 0$$

и $k(z) = 1/(1 - 3z + z^2)$. Тогда $k_n = F_{2n+2}$ и $k_n(\{0, 2\}) = F_{2n-1} - 1$.

34. Существует единственная цепочка α_n символов $\{\bar{1}, 0, 1\}$, такая, что $n = (\alpha_n)_2$ и в α_n нет ни ведущих нулей, ни последовательных ненулевых элементов: α_0 пусто; в противном случае $\alpha_{2n} = \alpha_n 0$, $\alpha_{4n+1} = \alpha_n 01$, $\alpha_{4n-1} = \alpha_n 0\bar{1}$. Любую цепочку, содержащую n, можно преобразовать в α_n при помощи сжатия $1\bar{1} \to 01$, $\bar{1}1 \to 0\bar{1}$, $01 \ldots 11 \to 10 \ldots 0\bar{1}$, $0\bar{1} \ldots \bar{1}\bar{1} \to \bar{1}0 \ldots 01$ и добавления или исключения ведущих нулей. Так как операции сжатия не увеличивают количество цифр, отличных от нуля, то в α_n содержится наименьшее количество. [*Advances in Computers* **1** (1960), 244–260.] Количество $\bar{\nu}(n)$ ненулевых цифр в α_n — это количество единиц в обычном представлении, перед которыми сразу же помещается либо нуль, либо подстрока $00(10)^k 1$ для некоторого $k \ge 0$.

Обобщение для систем представления по основанию $b > 2$ предложено Й. фон цур Гатеном (J. von zur Gathen), *Computational Complexity* **1** (1991), 360–394.