Глава 1

Позиционные системы счисления

История систем счисления восходит к тому далекому прошлому, когда человек для изображения требуемого числа пользовался насечками на палке или ссыпал камешки в мешочек. Эту систему записи чисел ученые назвали ***единичной, палочной или унарной***.

Человек, совершенствуя искусство счета, проделал огромный путь — от засечек на дереве до современного компьютера. Все достижения вычислительной культуры человека берут свое начало в единичной системе. Это и формирование абстрактного, оторванного от объекта понятия «числительного», это и первые абстрактные символы, первые модели. Имеются достаточно обоснованные предположения о том, что сначала человек изобрел числа, а лишь затем другие письменные знаки. Эволюция единичной системы счисления постепенно привела к идее пересчитывания группами, а затем к возникновению цифр и чисел, к позиционной цифровой их записи.

Используется ли единичная система в наше время?

Ответ для многих может оказаться неожиданным — да, используется. Малыши используют при счете пальцы рук, первоклассники осваивают арифметические операции при помощи счетных палочек. Кроме того, с числами, записанными в единичной системе счисления, приходится иметь дело при изучении и конструировании алгоритмов в специфических алгоритмических системах, например, в ***системе Поста (машина Поста)***.

Наиболее совершенными системами счисления являются позиционные системы. В первой части книги «Представление информации. Базовый курс» можно прочитать об истории систем счисления, о всевозможных видах непозиционных систем. В этой же части мы будем рассматривать только позиционные системы счисления.

В этой главе подробно рассмотрены принципы построения позиционных систем, правило перечисления чисел в P-ичных системах счисления. Доказана теорема о единст-

венности представления натурального числа в произвольной позиционной системе счисления в виде степенного ряда.

1.1. Некоторые определения из теории чисел

Приведем некоторые определения из общего курса математики, которые мы будем использовать при дальнейшем изложении материала.

Понятие числа в процессе развития человеческой цивилизации претерпевало существенные изменения. Окончательное определение было дано И.Ньютоном во «Всеобщей арифметике»:

«Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

Эта формулировка дает единое определение действительного числа, поэтому при дальнейшем изложении под числом мы будем понимать его величину, а не его символьную запись.

Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., использующиеся для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называются ***натуральными***.

Обыкновенной дробью называется число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число. Число m называется числителем дроби, n — ее знаменателем.

Обыкновенные дроби делятся на правильные и неправильные.

Обыкновенная дробь $\frac{m}{n}$ называется ***правильной***, если ее числитель меньше знаменателя, и ***неправильной***, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Например, следующие дроби являются правильными: $\frac{3}{7}, \frac{17}{34}, \frac{100}{101}$. Дроби $\frac{3}{3}, \frac{7}{4}, \frac{203}{51}$ являются примером неправильных дробей.

Числа, которые можно представить в виде обыкновенной дроби, называются ***рациональными***, а остальные действительные числа называются ***иррациональными***.

Например, числа π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ являются иррациональными.

Произвольные положительные действительные числа можно записывать в следующем виде:

$$a = N{,}n_1 n_2 \dots n_k \dots,$$

где N — это целая часть числа, а запятой от нее отделена его дробная часть.

Ниже мы рассмотрим, что обозначает такая форма записи в различных системах счисления.

В десятичной системе соответствующее число называют ***десятичной дробью***, в системе счисления с основанием P — ***P-ичной дробью***, но если система счисления не указана, то мы просто будем называть такое число дробью.

Заметим, что во многих странах в этой форме записи чисел целая часть от дробной отделяется не запятой, а ***точкой***, что и определяет для калькуляторов и компьютеров формат ввода и вывода числовой информации.

Если в записи дроби после запятой содержится бесконечное количество цифр, то эта дробь называется ***бесконечной***, если количество цифр после запятой в записи числа конечно, то дробь называется ***конечной***.

Примеры конечных дробей: 3,14; 4,12120089; 43,00001.

Примерами бесконечных дробей являются числа $\frac{1}{3} = 0{,}3333\dots$; $\pi = 3{,}1415926535897932384626 43\dots$(отношение длины окружности к ее диаметру).

Бесконечная дробь называется ***периодической***, если в ее записи после запятой, начиная с некоторого места, все следующие цифры можно представить в виде последовательно повторяющейся бесконечное число раз группы цифр. Минимальная последовательно повторяющаяся группа цифр в записи дроби после запятой называется ***периодом***.

Для краткости записи период принято записывать один раз, заключая его в круглые скобки. Например,

$$0{,}3333\dots = 0{,}(3);\ 0{,}2341783417834178\dots = 0{,}2(34178).$$

Более строго вышеприведенное определение можно записать так:

Бесконечная дробь $N{,}n_1 n_2 \dots n_k \dots$ называется ***периодической***, если существуют такие натуральные числа p, q, что $n_{k+p} = n_k$ для всех $k > q$. Совокупность цифр $n_{q+1} n_{q+2} \dots n_{q+p}$ называется периодом дроби, а число p — длиной периода.

Любое целое число или конечную дробь всегда можно записать и в виде бесконечной периодической дроби, период которой состоит из одной цифры 0 или 9. Например, $1 = 1{,}(0) = 0{,}(9)$.

Конечные и периодические дроби представляют собой ***рациональные*** числа. Действительные числа, запись которых является бесконечной непериодической дробью, называются ***иррациональными***.

Заметим, что при делении одного натурального числа на другое мы можем получить либо конечную, либо периодическую дробь. Данный факт доказывается в курсе математики. Доказательство основано на том, что при делении на любое натуральное число N мы имеем всего N различных остатков от деления. Если при получении очередной цифры дроби в процессе деления числителя правильной обыкновенной дроби на знаменатель остаток окажется равен нулю, то дробь будет конечной, в противном случае по крайней мере через $N - 1$ шаг остатки повторятся и дробь будет периодической.

Числовая последовательность, первый член (b_1) которой отличен от нуля, и каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же, не равное нулю число q, называется ***геометрической прогрессией*** со ***знаменателем*** q. Сумма первых n членов геометрической прогрессии равна

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

При $|q| < 1$ сумма членов бесконечной геометрической прогрессии равна

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Произведение n натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ называется ***факториалом*** числа n и обозначается $n!$. Считается также, что $0! = 1! = 1$.

Числа, образующие последовательность по следующему закону: $f_0 = f_1 = 1$; $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$, (для $k = 2, 3, \ldots$), называются ***числами Фибоначчи***.

Выпишем первые 10 чисел Фибоначчи:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.

1.2. Базис систем счисления. Принцип позиционности

Системой счисления называется способ записи (нумерации) чисел. Символы, при помощи которых записывается число, называются ***цифрами***.

Надо различать понятия «вид цифры» и «значение цифры». Например, в римской системе счисления числа записываются при помощи цифр I, V, X, L, C, D, M, которые имеют следующие значения: I —1, V — 5, X — 10, L — 50, C — 100, D — 500 и M — 1000.

Системы счисления, в которых вклад каждой цифры в величину числа зависит от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающей число, называются ***позиционными***.

Примером позиционной системы является наиболее привычная нам десятичная система счисления. Классификация позиционных систем счисления была проведена в теме 3 первой части.

Системы счисления, в которых каждой цифре соответствует величина, не зависящая от местонахождения этой цифры в записи числа, называются ***непозиционными***.

Примером непозиционной системы счисления является римская система записи чисел.

Совокупность различных цифр, используемых в системе счисления для записи чисел, называется ***алфавитом*** системы счисления.

При рассмотрении позиционных систем счисления чрезвычайно важным является понятие ***базиса*** системы счислении.

Базис позиционной системы счисления — это последовательность чисел, каждое из которых задает значение цифры по ее месту в записи числа, то есть «вес» каждого разряда.

Пример 1.1. Выпишем базисы некоторых систем счисления.

Десятичная система: $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots, 10^n, \ldots$.

Двоичная система: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots$.

Восьмеричная система: $1, 8, 8^2, 8^3, 8^4, \ldots, 8^n, \ldots$.

Базисы приведенных систем счисления образуют геометрические прогрессии со знаменателями 10, 2 и 8.

Договоримся называть такие системы счисления ***традиционными***. В более общем виде для традиционных позиционных систем счисления базис можно записать в виде последовательных членов геометрической прогрессии

$$\ldots P^{-3}, P^{-2}, P^{-1}, 1, P, P^2, P^3, \ldots, P^n, \ldots .$$

Знаменатель P геометрической прогрессии, члены которой образуют базис традиционной системы счисления, называется ***основанием*** системы.

Традиционные позиционные системы счисления с основанием P будем называть ***P-ичными***.

Зная базис P-ичной системы счисления, мы можем сказать, сколько «весит» единица каждого разряда в позиционной системе.

Наряду с широко известными (традиционными) системами счисления, базис которых образуют члены геометрических прогрессий, а значения цифр есть натуральные числа, существуют системы счисления, базисы которых построены на иных принципах. Такие системы счисления будем называть ***нетрадиционными***.

Нетрадиционными, в нашем понимании, являются такие позиционные системы как ***факториальная, фибоначчиева, уравновешенная*** и другие.

Пример 1.2. Выпишем базисы некоторых нетрадиционных систем счисления.

Факториальная система: $1!, 2!, 3!, 4!, \ldots, (n-1)!, n!, \ldots$.

Фибоначчиева система: $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.

Выделение последовательности чисел в качестве базиса, которые задают «вес» или значение каждой цифры в записи числа в соответствии с ее местоположением в этой записи, и лежит в основе принципа построения позиционных систем счисления. Этот принцип был назван ***принципом позиционности.***

Среди позиционных систем счисления принято выделять ***смешанные P-Q-ичные*** системы счисления. Подробнее о смешанных и нетрадиционных системах счисления можно прочитать в параграфе 1.6 данной главы, в главе 4, а также в книге В.Н. Касаткина «Новое о системах счисления».

1.3. Алфавит и основание позиционной системы счисления

Совокупность различных цифр, используемых в системе счисления для записи чисел, называется ***алфавитом*** системы счисления. Количество этих цифр в P-ичных системах (размерность алфавита) равно ***основанию*** системы счисления.

Относительно приведенного определения сделаем следующее замечание. Обозначим числа, составляющие базис позиционной системы, через P_0, P_1, P_2, ... Тогда легко доказать, что для количества цифр N_k, употребимых в k-ом разряде числа, верно соотношение $N_k \le \frac{P_k + 1}{P_k}$. Для P-ичных систем отношение $\frac{P_{k+1}}{P_k}$ постоянно для всех k и равно основанию P (именно это и записано в определении). Для нетрадиционных систем относительно размерности алфавита в общем случае сказать ничего нельзя. Это замечание о размерности алфавита будем называть ***следствием из принципа позиционности.***

Так, например, алфавит десятичной системы составляют цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Алфавитом же произвольной системы счисления с основанием P служат числа 0, 1, ..., $P-1$, каждое из которых должно быть записано с помощью одного уникального (то есть отличного от других) символа, младшей же цифрой всегда является 0. Совокупность таких символов и образует множество цифр (алфавит) в P-ичной системе счисления.

Система счисления	Основание	Количество цифр	Цифры
Двоичная	2	2	0, 1
Троичная	3	3	0, 1, 2
Восьмеричная	8	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Шестнадцатеричная	16	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Основанием P-ичной системы счисления может быть любое натуральное число, большее единицы.

Покажем невозможность построения позиционной системы счисления, состоящей из одной цифры (очевидно, что в качестве этой цифры можно рассматривать лишь 1). Из цифры 1 состоит палочная система счисления. Отсутствие цифры 0 в этой системе не позволяет записывать в ней произвольные числа. Если мы делаем предположение, что эта система позиционная, но вводим цифру 0 в дополнение к 1, то это приведет к нарушению следствия из принципа позиционности о количестве цифр, используемых в каждом разряде. Действительно, базисом единичной системы в предположении ее позиционности является последовательность

1, 1, 1, 1,... . Отношение $\frac{P_{k+1}}{P_k}$ для любого k равно 1.

Следовательно, количество цифр не может быть больше 1. Цифра 0 в одиночку тем более не может основать систему счисления.

Следовательно, системой счисления с минимальным алфавитом является двоичная система, все числа в которой записываются с помощью 0 и 1. Эта система получила наибольшее распространение при представлении чисел в компьютере.

Если основание системы счисления P не больше десяти, то для символьного представления цифр в ней естественно использовать первые P десятичных цифр (от 0 до $P-1$). Например, в пятеричной системе счисления будут использоваться пять цифр: 0, 1, 2, 3, 4.

Для $10 < P < 36$ в качестве первых десяти цифр также обычно используют их десятичное представление, а для остальных цифр — буквы латинского алфавита.

Из класса P-ичных систем в вычислительной технике наибольшее применение нашла шестнадцатеричная система, алфавит которой составляют цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Для систем счисления с основаниями большими 36 единых правил для формы записи цифр не существует.

Для представления информации в бинарных файлах персональных компьютеров используется 256-ричная система счисления, каждая цифра которой изображается с помощью символа, вид которого зависит от текущего состояния кодовой таблицы (так, русские буквы в кодовой таблице могут как присутствовать, так и отсутствовать). В этой системе счисления символ 0 будет обозначать сорок девятую, а не первую цифру, так как код такого символа обычно равен 48, а символ A (первая заглавная латинская буква) с кодом 65 описывает 66-ю по счету цифру в 256-ричной системе счисления. Число ноль, т.е. первая цифра в алфавите системы, тогда будет записываться с помощью символа с нулевым кодом.

В дальнейшем, если при описании произвольной P-ичной системы счисления вид ее цифр указан не будет, то мы будем считать, что первые десять цифр совпадают с десятичными, а следующие 26 — с латинскими буквами. Остальные цифры будем записывать в виде соответствующего числа в десятичной системе, заключенного в квадратные скобки. Так [50] в системах счисления с основанием больше 50-ти будет обозначать 51-ую по счету от нуля цифру. Аналогично, для записи максимальной цифры в произвольной P-ичной системе счисления мы можем использовать обозначение $[P-1]$.

1.4. Единственность представления чисел в позиционных системах

Целью данного параграфа является доказательство того, что в любой позиционной системе можно записать любое число и притом единственным образом. Этот факт мы будем доказывать только для P-ичных систем. Доказательство этого факта для нетрадиционных систем счисления приведено в [5].

В математике доказывается такой замечательный факт, что любое действительное число можно представить в виде суммы целых степеней (неотрицательных для целой части и отрицательных для дробной) произвольного натурального числа $P > 1$. Если потребовать, чтобы количество одинаковых степеней P (коэффициент при соответствующей степени) не превосходило $P-1$, то для натуральных чисел такое представление окажется единственным.

Докажем сформулированное выше утверждение только для натуральных чисел как теорему существования и единственности представления натурального числа в виде ***степенного ряда.***

Теорема 1. Пусть P — произвольное натуральное число, большее единицы. Существует и единственно представление любого натурального числа X в виде

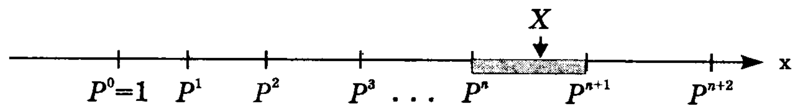
$$X = a_nP^n + a_{n-1}P^{n-1} + \ldots + a_1P + a_0, \qquad (1.1)$$

где $0 \le a_i < P$, $0 \le i \le n$, $a_n \ne 0$.

Доказательство

Существование. Доказательство основано на методе построения, т.е. для произвольного натурального числа мы построим представление вида (1.1).

Так как числа P^0, P^1, P^2, P^3, ... образуют монотонно возрастающую числовую последовательность, то существует такое натуральное число n, что

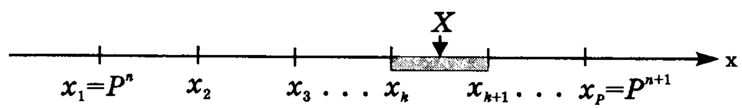


$$P^n \le X < P^{n+1} \qquad (1.2)$$

Разделим интервал $[P^n; P^{n+1})$ на $P-1$ равную часть, тогда границами полученных интервалов окажутся числа $x_1 = 1 \cdot P^n$, $x_2 = 2 \cdot P^n$, ..., $x_P = P \cdot P^n = P^{n+1}$. Длина каждого нового промежутка $[x_k; x_{k+1})$, где $k = 1, ..., P-1$, равна P^n.

Из (1.2) и проведенного построения следует, что число X попадет в один из интервалов $[x_k; x_{k+1})$, то есть существует такое натуральное число k, $1 \le k < P$, что

$$k \cdot P^n \le X < (k+1)\, P^n. \qquad (1.3a)$$



Положим $a_n = k < P$. Очевидно, что $a_n \ne 0$.

Обозначим разницу между числом X и левой границей x_k соответствующего интервала как $Y = X - a_n P^n$. При этом $0 \le Y < P^n$ по построению.

Если Y=0, то построение закончено, в противном случае, опять сравнивая уже величину Y с членами возрастающей последовательности: 1, P, P^2, P^3, ... P^n, найдем целое число m такое, что $P^m \le Y < P^{m+1}$, $0 \le m < n$.

Для номеров $m + 1 \le i \le n - 1$ положим $a_i = 0$ (таких номеров может и не оказаться, то есть $m + 1 = n$) и вычислим a_m. Для этого, как и ранее, разделим интервал $[P^m; P^{m+1})$ на P–1 равную часть длиной P^m и определим, в какую из них попадает число Y, т.е. среди целых значений h: $0 \le h < P$ найдем такое, что

$$h \cdot P^m \le Y < (h + 1) \cdot P^m, \tag{1.3b}$$

Положим $a_m = h < P$ и обозначим $Z = Y - P_m$. И вновь повторим рассуждения. Процесс обязательно завершится, так как на каждом шаге мы сравниваем оставшееся число все с меньшим количеством различных неотрицательных степеней числа P. А как только результат очередного вычитания окажется меньше чем P, мы положим a_0 равным ему, и построение закончится.

В результате получим, что

$$X = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0,$$

где $0 \le a_i < P$, $0 \le i \le n$, $a_n \ne 0$.

Единственность. Для доказательства воспользуемся методом от противного.

Предположим, что некоторое натуральное число имеет два различных представления вида (1.1):

$$X_1 = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0 \tag{1.4a}$$

и

$$X_2 = b_m P^m + b_{m-1} P^{n-1} + \ldots + b_1 P + b_0. \tag{1.4b}$$

Покажем, что если $m > n$, то $X_2 > X_1$. Для доказательства оценим X_2 снизу наименьшим возможным числом ($b_m = 1$; $b_{m-1} = ... = b_1 = b_0 = 0$). Тогда

$$X_2 \ge 1 \cdot P^m + 0 \cdot P^{m-1} + \ldots + 0 \cdot P + 0 = P^m.$$

Оценим X_1 сверху наибольшим возможным числом ($a_n = ... = a_1 = a_0 = P-1$). Тогда

$$X_1 \le (P-1)P^n + (P-1)P^{n-1} + \ldots + (P-1)P + (P-1) = \\ = P^{n+1} - 1 < P^{n+1}.$$

Здесь для вычисления суммы использовалась формула суммы членов конечной геометрической прогрессии.

Так как по предположению $m \ge n + 1$, то $X_1 < P^{n+1} \le X_2$, т.е. $X_1 < X_2$.

Следовательно, если $X_1 = X_2$, то $n = m$.

Пусть далее существует такое k, что $a_i = b_i$ при $k + 1 \le i \le n = m$, но $a_k \ne b_k$. Сравним числа

$$Y_1 = X_1 - a_n P^n - \ldots - a_{k+1} P^{k+1}$$

и

$$Y_2 = X_2 - b_n P^n - \ldots - b_{k+1} P^{k+1}.$$

Получим $Y_1 = a_k P^k + \ldots + a_1 P + a_0$, $Y_2 = b_k P^k + \ldots + b_1 P + b_0$, где $a_k \ne b_k$. Тогда $Y_1 \ne Y_2$, и, следовательно, $X_1 \ne X_2$.

Получили противоречие с исходным предположением о равенстве представлений (1.4a) и (1.4b), значит $a_i = b_i$ при $0 \le i \le n = m$ и представление вида (1.1) для любого натурального числа единственно.

Теорема доказана. ∎

Пример 1.3. Построим представление десятичного числа X = 3056 в виде степенных рядов при различных значениях P:

1) $P = 10$.

Очевидно, что $10^3 \le 3056 < 10^4$, тогда в представлении (1.1) $n = 3$.

Разделив интервал $[10^3; 10^4)$ на 9 равных частей, получим, что $3 \cdot 10^3 \le 3056 < 4 \cdot 10^3$ и $a_3 = 3$.

Тогда $Y = 3056 - 3 \cdot 10^3 = 56$ и, так как $10 \le 56 < 10^2$, то $a_2 = 0$.

Далее получаем $5 \cdot 10 \le 56 < 6 \cdot 10$ и $a_1 = 5$.

Оставшееся число $Z = Y - 5 \cdot 10 = 56 - 50 = 6 < 10$, следовательно, $a_0 = 6$ и построение закончено.

В результате $3056 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 6$.

2) $P = 16$.

Так как $16^2 \le 3056 < 16^3$, то в представлении (1.1) $n = 2$.

Разделив интервал $[16^2; 16^3)$ на 15 равных частей, получим, что $11 \cdot 16^2 \le 3056 < 12 \cdot 16^2$ и $a_2 = 11$.

Тогда $Y = 3056 - 11 \cdot 16^2 = 240$. Далее (аналогично) $15 \cdot 16 \le 240 < 16^2$ и $a_1 = 15$.

И так как $240 - 15 \cdot 16 = 0$, то построение окончено, а $a_0 = 0$.

В результате $3056 = 11 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16$.

3) $P = 2$.

$2^{11} \le 3056 < 2^{12}$, то есть в представлении (1.1) $n = 11$.

В отличие от рассмотренных случаев (1)–(2) делить найденный интервал на более мелкие уже не требуется и $a_{11} = 1$.

Далее $3056 - 2^{11} = 1008$ и $2^9 \le 1008 < 2^{10}$, т.е. $a_{10} = 0$, $a_9 = 1$;

$1008 - 2^9 = 496$ и $2^8 \le 496 < 2^9$, т.е. $a_8 = 1$;
$496 - 2^8 = 240$ и $2^7 \le 240 < 2^8$, т.е. $a_7 = 1$;
$240 - 2^7 = 112$ и $2^6 \le 112 < 2^7$, т.е. $a_6 = 1$;
$112 - 2^6 = 48$ и $2^5 \le 48 < 2^6$, т.е. $a_5 = 1$;
$48 - 2^5 = 16$ и $2^4 \le 16 < 2^5$, т.е. $a_4 = 1$;
$16 - 2^4 = 0$ и $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$.

В результате $3056 = 2^{11} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4$.

Из теоремы 1 следует, что любое натуральное число можно записать в какой угодно позиционной системе счисления, причем единственным образом.

Пример 1.4. Десятичное число 23 можно записать

в двоичной системе счисления как 10111_2;
в троичной системе счисления как 212_3;
в четверичной системе как 113_4;
в шестнадцатеричной системе как 17_{16};
в 23-ичной системе как 10_{23};

В системах счисления с основанием большим, чем 23, данное число будет представлено одной цифрой (это будет буква латинского алфавита N или некий другой символ, подробнее о виде цифр в P-ичных системах счисления было рассказано в параграфе 1.3).

В разделе математики «Теория чисел» доказывается, что и любую правильную дробь можно представить в виде конечной или бесконечной суммы отрицательных степеней любого натурального числа $P>1$. То есть конечную десятичную дробь можно представить в виде ***конечной суммы отрицательных степеней*** числа 10, а бесконечную десятичную дробь — в виде ***бесконечной суммы*** таких степеней. Например,

$$0{,}123 = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} = 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}003;$$

$$\frac{1}{6} = 0{,}1(6) = 1 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} \ldots = 0{,}1 + 0{,}06 + 0{,}006 + \ldots;$$

$$\pi - 3 = 0{,}1415\ldots = 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} \ldots = 0{,}1 + 0{,}04 + 0{,}001 + 0{,}0005 + \ldots .$$

Так как модуль вещественного числа можно представить в виде суммы его целой и дробной части (любая из этих частей может и отсутствовать), то результат, полученный в теореме 1, можно переформулировать следующим образом.

Любое действительное число можно записать в P-ичной системе счисления с базисом

$$\ldots,\ P^{-2},\ P^{-1},\ P^0,\ P^1,\ P^2 \ldots .$$

То есть любое неотрицательное действительное число можно записать в виде

$$a = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0 + a_0 + a_{-1} P^{-1} + a_{-2} P^{-2} + \ldots =$$
$$= \sum_{i=-\infty}^{n} a_i P^i, \quad 0 \le a_i < P, \quad n \ge 0, \qquad (1.5)$$

где $P>1$ является ***основанием*** позиционной системы счисления, а a_i — ***цифрами*** числа в P-ичной системе счисления.

Величина целого неотрицательного числа n зависит от количества значащих цифр в целой части числа a. Здесь $a_n>0$ — первая (старшая) ***значащая*** цифра (в этом случае, если среди цифр a_0, ... , a_{n-1} есть нулевые, то они также являются значащими). Если разложение дробной части числа a по отрицательным степеням P является конечным, то цифры a_i при $i=-\infty$, ..., $k-1$ $(k \ge 0)$ равны нулю и являются ***незначащими***, а $a_{-k} > 0$ — младшая ***значащая*** цифра. В этом случае, если $k > 1$ и среди цифр a_{-1}, ..., a_{-k+1} есть нулевые, то они также являются значащими, а если число a целое, т.е. $k = 0$, то младшей значащей цифрой является a_0, даже если $a_0 = 0$. Исключением является число ноль, у которого в любой P-ичной системе счисления в представлении (1.5) $a_0 = 0$ — единственная значащая цифра и $n = k = 0$.

Отрицательные числа в P-ичных системах счисления представляются с помощью знака «–» перед выражением вида (1.5) для модуля отрицательного числа. Поэтому далее в части II данной книги мы будем рассматривать только положительные числа.

Назовем формулу (1.5) ***основной формулой для P-ичных систем счисления***. Именно их мы и будем рассматривать далее. Позиционные системы, базис которых не составляет геометрическую прогрессию, будут представлены в главе 4.

Как следует из принципа позиционности, P-ичная система счисления позволяет с помощью заранее ограниченного набора цифр записать как сколь угодно большое, так и сколь угодно малое число.

Любое число в позиционной системе счисления с основанием P можно записать и просто путем последовательного перечисления его значащих цифр, начиная со старшей, отделяя при этом целую часть от дробной запятой. То есть разложению вида (1.5) вещественного числа a по степеням P соответствует запись вида

$$a = a_n...a_1a_0,a_{-1}...a_{-k}. \qquad (1.6)$$

Представление числа в P-ичной системе счисления в виде (1.5) называется ***развернутой формой*** записи числа (эта форма в основном используется при решении задач).

Представление числа в P-ичной системе счисления в виде (1.6) называется ***свернутой формой*** записи числа (эта форма наиболее употребима при изображении чисел в позиционных системах счисления).

Так, натуральное число a в P-ичной системе счисления можно записать как

$$a = a_nP^n + a_{n-1}P^{n-1} + ... + a_1P + a_0 = a_na_{n-1}...a_1a_0. \qquad (1.7)$$

Правильную конечную P-ичную дробь b можно записать в виде

$$b = b_{-1}P^{-1} + b_{-2}P^{-2} + ... + b_{-k}P^{-k} = 0,b_{-1}b_{-2}...b_{-k}. \qquad (1.8)$$

При использовании развернутой формы для записи числа в P-ичной системе счисления основание P обычно записывают в десятичной системе, а цифры — в P-ичной. При записи чисел в P-ичной системе счисления в свернутой форме цифры также записывают в P-ичной системе, а основание P, записанное в десятичной системе, приписывают к числу в качестве его нижнего индекса. Исключение может составлять лишь десятичная система счисления, при записи чисел в которой индекс часто опускается.

Заметим, что запись любого основания P в P-ичной же системе счисления имеет вид 10_P, что следует из развернутой формы записи числа P в P-ичной системе: $P = 1 \cdot P + 0$.

При вычислении значения P-ичного числа по развернутой форме удобно пользоваться ***схемой Горнера***, которая позволяет получить результат с использованием минимального числа следующих арифметических операций: +, ×, : (операция возведения в степень не используется). Подробнее о применении схемы Горнера вы можете прочитать в параграфах 3.1 и 3.2 главы 3.

Говорить об однозначном представлении дробных чисел в P-ичных системах счисления (в том числе и в десятичной), вообще говоря, некорректно.

Покажем, что каждую конечную P-ичную дробь $b = 0,b_{-1}b_{-2}...b_{-k}$ можно записать и в форме бесконечной периодической дроби с периодом, состоящим из максимальной цифры соответствующей системы счисления. Непериодическая часть такой дроби равна числу $b_{-1}b_{-2}...b_{-k}$, уменьшенному на единицу. Т.к. $b_{-k} > 0$, то на единицу будет уменьшена именно эта цифра, а остальные останутся неизменными.

В развернутой форме эта дробь будет иметь вид:

$$b_{-1}P^{-1}+b_{-2}P^{-2}+...+(b_{-k}-1)P^{-k}+(P-1)P^{-(k+1)}+(P-1)P^{-(k+2)}+... \qquad (1.9)$$

Факт равенства значения выражения (1.9) числу b непосредственно следует из формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = P^{-1} < 1$, которая соответствует периодической части дроби (1.9). В данном случае первый член прогрессии — $(P-1)P^{-(k+1)}$, а сама сумма равна

$$\frac{(P-1)P^{-(k+1)}}{1-P^{-1}} = \frac{P(P-1)P^{-(k+1)}}{P-1} = 1 \cdot P^{-k}.$$

То есть всю периодическую часть дроби (1.9) можно заменить на единицу в разряде $(-k)$ и, следовательно, период можно отбросить, добавляя при этом единицу к непериодической части дроби (1.9). В результате получаем дробь $b = 0,b_{-1}b_{-2}b_{-k}$, что и требовалось доказать.

Пример 1.5. Представление конечных дробей в виде периодических дробей

$$1_{10} \equiv 0,(9)_{10};\ 0,001_2 \equiv 0,000(1)_2;\ 0,9AF_{16} \equiv 0,9AE(F)_{16}.$$

1.5. Представление чисел в *P*-ичной системе счисления

Для того чтобы научиться производить арифметические действия в какой-либо системе счисления, прежде всего необходимо уметь перечислять в ней по порядку натуральные числа и представлять дробные части вещественных чисел.

Как следует из параграфа 1.4, в любой P-ичной системе счисления натуральные числа, меньшие ее основания P, представляются с помощью одной цифры данной системы. Для чисел же больших или равных P, требуются уже, по крайней мере, две цифры. Само число P в системе счисления с основанием P записывается в виде 10_P, что следует из развернутой формы записи числа P в P-ичной системе: $P = 1{\cdot}P + 0$.

Для перечисления чисел, больших P в P-ичной системе счисления, воспользуемся следующими несложными ***правилами***, описывающими, как по известной P-ичной форме записи натурального числа a_P получить запись следующего натурального числа a_P+1:

1) *если последняя (крайняя справа) цифра числа a_P меньше, чем $P-1$, то в следующем по порядку натуральном числе все цифры, кроме последней, будут совпадать с цифрами числа a_P, а последняя цифра числа a_P+1 будет на единицу больше последней цифры числа a_P;*
2) *если последняя (крайняя справа) цифра числа a_P равна $P-1$, то последняя цифра числа a_P+1 будет равна 0, а остальные цифры будут представлять число, состоящее из первых цифр числа a_P (начиная с крайней левой цифры и заканчивая предпоследней справа), увеличенное на единицу по правилам* (1)–(2); *если же первые цифры в записи a_P отсутствуют, то число a_P+1 будет равно 10_P.*

Покажем, используя правила (1)–(2), как перечислять натуральные числа в различных системах счисления.

Пример 1.6. В двоичной системе первые 16 чисел будут иметь следующий вид:

1 = 1_2;
2 = 10_2 (правило (2));
3 = 11_2 (правило (1));
4 = 100_2 (дважды примененное правило (2));
5 = 101_2 (правило (1));
6 = 110_2 (правила (2) и (1));
7 = 111_2 (правило (1));
8 = 1000_2 (трижды примененное правило (2));
9 = 1001_2 (правило (1));
10 = 1010_2 (правила (2) и (1));
11 = 1011_2 (правило (1));
12 = 1100_2 (дважды примененное правило (2), правило (1));
13 = 1101_2 (правило (1));
14 = 1110_2 (правила (2) и (1));
15 = 1111_2 (правило (1));
16 = 10000_2 (четырежды примененное правило (2)).

Всем, кто желает освоить программирование на современных алгоритмических языках, полезно знать вид приведенных двоичных чисел наизусть.

Пример 1.7. Приведем, но уже без подробных комментариев, некоторые числа в 16-ричной системе счисления:

10 = A_{16};	19 = 13_{16};
11 = B_{16};	20 = 14_{16};
12 = C_{16};	...;
13 = D_{16};	30 = $1E_{16}$;
14 = E_{16};	31 = $1F_{16}$;
15 = F_{16};	32 = 20_{16};
16 = 10_{16};	...;
17 = 11_{16};	255 = FF_{16};
18 = 12_{16};	256 = 100_{16}.

Перейдем теперь к представлению P-ичных дробей. Рассмотрим обыкновенные дроби, записанные с помощью отношения числителя и знаменателя, наибольший общий делитель которых равен 1. Как и в десятичной системе счисления, такие дроби будут точно представимы ***конечной*** P-ичной дробью, если существует такое натуральное число m, что при умножении на него знаменателя дроби можно получить некоторую натуральную степень числа P. Если же такого числа не существует, то в P-ичной системе счисления дробь окажется бесконечной периодической. Данный факт следует непосредственно из формулы (1.8). Например, в десятичной системе счисления

$$\frac{1}{4} = \frac{1\cdot 25}{4\cdot 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25 \text{ (здесь } m = 25).$$

Кроме того, из развернутого представления дробной части числа следует, что в любой системе счисления с основанием P верны равенства:

$$\frac{1}{P} = 0{,}1_P;\ \frac{1}{P^2} = 0{,}01_P;\ \dots;\ \frac{1}{P^k} = 0{,}\underbrace{0\dots0}_{k-1}1_P. \qquad (1.10)$$

Пусть для нашей дроби такое натуральное число m существует. При умножении знаменателя на m получим k-ую степень числа P. Умножим и числитель дроби на m, представив результат умножения в P-ичной системе счисления. Дополним его, если потребуется, до k цифр нулями слева. Полученное число, записанное после запятой, и будет являться конечной P-ичной дробью для исходной рациональной.

Пример 1.8. Запишем дробь $\frac{5}{16}$ в двоичной системе.

Так как 16 уже является четвертой степенью двойки, то переведем 5 в двоичную систему ($5 = 101_2$) и дополним до четырех цифр — 0101. В результате получаем $\frac{5}{16} = 0{,}0101_2$.

Пример 1.9. Запишем дробь $\frac{5}{6}$ в 12-ричной системе.

Для того чтобы знаменатель стал первой степенью двенадцати, его нужно умножить на 2. Тогда, умножая числитель на 2 и представляя его с помощью одной цифры 12-ричной системы, получим $\frac{5}{6} = 0{,}A_{12}$.

В главе 3 будут даны способы перевода из одной системы в другую произвольных дробей. Однако уже сейчас можно заметить, что конечные десятичные дроби могут оказаться периодическими P-ичными дробями, и наоборот, периодические десятичные дроби могут стать в некоторых системах счисления конечными P-ичными дробями. Так, например, $0{,}1_{10} = 0{,}0(0011)_2$, а $0{,}(3)_{10} = 0{,}1_3$. Но любая конечная двоичная дробь всегда будет конечной в десятичной системе счисления, так как ее знаменатель, являющийся некоторой степенью двух, всегда можно домножить на такую же степень пяти и получить степень десяти.

Пример 1.10. $0{,}011_2 = \frac{11_2}{1000_2}$ запишем в десятичной системе.

Для того чтобы знаменатель, равный сейчас 2^3, оказался степенью десяти, его нужно домножить на 5^3. Таким образом, производя необходимые действия в десятичной системе счисления, получим

$$\frac{11_2}{1000_2} = \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5^3}{8 \cdot 5^3} = \frac{375}{1000} = 0{,}375\,.$$

1.6. Примеры различных систем счисления

Принципиально все позиционные системы счисления являются равноправными, но в разных ситуациях удобнее пользоваться разными системами. Так, в повседневной жизни мы обычно пользуемся десятичной системой счисления ($P = 10$). Очевидно, что эту систему мы предпочитаем остальным позиционным системам счисления лишь потому, что количество пальцев на руках у человека равно десяти, а именно пальцы первоначально служили основным «инструментом» для счета. Таблицы сложения и умножения в десятичной системе, основные арифметические операции и правила переноса усваиваются нами еще в детстве, в результате повседневной практики мы оперируем ими подсознательно. По этой причине многие люди даже не догадываются, что существуют другие системы счисления.

Приведем несколько примеров позиционных систем счисления, отличных от десятичной системы, часть из которых имеют практическое значение.

1) История подтверждает такой факт: шведский король Карл XII увлекался математикой и, в частности, считал восьмеричную систему счисления более удобной по сравнению с десятичной. Карл XII намеревался королевским указом ввести восьмеричную систему счисления как общегосударственную, и только неожиданная смерть короля помешала осуществлению этого необычного намерения.

2) В современных электронных вычислительных машинах для организации арифметических операций используются двоичная и смешанная двоично-шестнадцатеричная системы счисления. Подробнее вы можете прочитать об этом в части III данной книги.

3) В главе 4 приведена классическая задача на взвешивания, которую достаточно просто решить, если выбрать подходящую систему счисления. В данном случае — ***уравновешенную***. Использование уравновешенной троичной системы счисления легло в основу конструирования вычислительной машины «Сетунь». Особенности этой машины до сих пор привлекают внимание. Есть ряд серьезных соображений, которые позволяют высказать мысль о том, что инженерные поиски в создании троичных машин не закончены.

4) В реальной жизни для описания определенных явлений мы пользуемся мерами или масштабами, которые можно соотнести с нетрадиционными позиционными системами счисления.

Так, мы ежедневно сталкиваемся с измерением времени. Одной из форм измерения времени является следующая: *дни, часы, минуты, секунды, десятые доли секунды, сотые доли секунды...* . Для записи времени в секундах можно воспользоваться системой счисления со следующим базисом: ... 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 60, 600, 3600, 86400, 864000, ...

Дни (десятки)	Дни (единицы)	Часы	Минуты	Секунды	Десятые доли секунды	Сотые доли секунды
$10 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$	$24 \cdot 60 \cdot 60$	$60 \cdot 60$	60	1	10^{-1}	10^{-2}

Можно сказать, что такая система имеет 3 различных основания:

$P_1 = 10$ для записи долей секунд и количества дней в интересующем нас промежутке времени (дней может быть как угодно много);

$P_2 = 24$ для представления часов;

$P_3 = 60$ для минут и секунд (подразумевается, что любое количество целых минут или секунд, не превышающее 59, составляет одну цифру в соответствующем разряде такой системы счисления).

Итак, если нам требуется подсчитать количество секунд в 12 днях 14 часах 35 минутах и 16,97 секундах, необходимо использовать следующую формулу:

$$1{\cdot}864000 + 2{\cdot}86400 + 14{\cdot}3600 + 35{\cdot}60 + 16 + 9{\cdot}10^{-1} + 7{\cdot}10^{-2}.$$

5) До 1971 года в Англии в денежной системе использовались следующие единицы: 1 фунт стерлингов = 20 шиллингов; 1 шиллинг = 12 пенсов.

Аналогично подсчету времени в секундах для подсчета значения некоторой суммы денег в пенсах использовалась позиционная система счисления с базисом 1, 12, 240, 2400, ...

В настоящее же время, когда один фунт считается равным 100 пенсам, в английской денежной системе используется десятичная система счисления.

6) Во многих ЭВМ первых поколений применялась двоично-десятичная система счисления, являющаяся примером ***P-Q-ичной*** позиционной системы записи чисел (здесь $P < Q$). В такой системе каждая цифра числа, заданного в Q-ичной системе, заменяется соответствующим ее представлением в P-ичной системе, то есть в двоично-десятичной системе каждая десятичная цифра будет записана в двоичной системе. При этом количество разрядов, отводимых под запись любой цифры Q-ичной системы в ее P-ичном представлении, равно числу P-ичных цифр в максимальной цифре Q-ичной системы счисления.

Пример 1.11. Запишем число 628,5 в двоично-десятичной системе.

Максимальная цифра 9 из десятичной системы в двоично-десятичной системе представляется четырьмя двоичными цифрами ($9_{10} = 1001_2$). Тогда число 629,5 в двоично-десятичной системе будет записано в виде:

$$11000101001{,}0101_{2-10} =$$
$$= 2^2{\cdot}10^2 + 2{\cdot}10^2 + 2{\cdot}10 + 2^3 + 1 + 2^2{\cdot}10^{-1} + 10^{-1}.$$

Опустить здесь возможно лишь первый незначащий ноль в 2-10-ной записи цифры 6. Двоичное представление остальных десятичных цифр должно быть дополнено слева нулями до четырех двоичных разрядов (запись чисел, в том

числе и десятичных цифр, в двоичной системе счисления разбирается в параграфе 1.5).

Особый интерес в P-Q-ичных системах представляет случай, когда $Q = P^m$, где m — натуральное число, большее единицы. Тогда представление числа в P-ичной системе счисления совпадает с его представлением в P-Q-ичной системе. Системы с такими основаниями P и Q назовем ***смешанными*** позиционными системами счисления. Подробно они будут рассмотрены в главе 4.

7) Рассмотрим также, как можно ввести позиционные системы счисления, основанные на разложении чисел не по степеням натурального числа $P > 1$. Например, базисом разложения могут служить факториалы натуральных чисел:

$$a = a_n n! + a_{n-1}(n-1)! + \ldots + a_3 3! + a_2 2! + a_1 1! + \frac{a_{-1}}{2!} + \frac{a_{-2}}{3!} + \ldots =$$
$$= a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_{-1} a_{-2},\ 0 < a_{|i|} \le i,\ i = 1,2,\ldots \qquad (1.11)$$

Преимущество такой системы заключается в том, что для больших чисел количество цифр в свернутой форме записи «факториального» числа будет меньше, чем в десятичной системе счисления. Однако для записи старших цифр больших чисел придется использовать нестандартные цифры. Младшая же цифра a_1 целой части и старшая a_{-1} в дробной числа a в разложении (1.11) в силу принципа позиционности могут принимать лишь два значения — 0 или 1. Однако «факториальное» разложение можно начинать и с другого числа, увеличивая количество цифр в младшем разряде на целое число. Обозначим его q:

$$a = a_n(n+q-2)(n+q-3)\ \ldots\ (q+1)q + \ldots + a_3(q+1)q +$$
$$+ a_2 q + a_1 + \frac{a_{-1}}{q} + \frac{a_{-2}}{q(q+1)} + \ldots = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_{-1} a_{-2},$$
$$0 \le a_{|i|} < i + q - 1,\ i = 1,2,\ldots \qquad (1.12)$$

Назовем системы счисления, построенные на разложении (1.12), ***факториальными*** с основанием q.

В заключение еще раз проанализируем, почему непозиционные системы счисления не получили широкого распространения в современном обществе.

Во-первых, история распорядилась так, что человечество в своей практике использует в основном только одну непозиционную систему счисления — римскую. В этой системе счисления для обозначения цифр используются символы: I(1), V(5), X(10), L(50), C(100), D(500), M(1000).

Во-вторых, очевидны неудобства записи чисел в подобных системах:

- при работе с большими числами, приходилось бы придумывать новые символы (цифры), причем этот процесс может продолжаться бесконечно (такая проблема у большинства позиционных систем счисления отсутствует);
- встает проблема представления дробных частей чисел, особенно у иррациональных чисел (рациональные дроби можно записывать в виде отношения целых числителя и знаменателя);
- правила формирования чисел даже из уже перечисленных цифр достаточно сложны, и если их не знать точно, то, например, далеко не очевидно, какая из следующих форм записи числа 1998 в римской системе счисления верна: MCMXCVIII или MXMVIII (а действительно, какая из них верна?).

Тем не менее, запись чисел в римской системе находит ограниченное применение в настоящее время, в том числе при нумерации разделов в книгах и веков в исторических трудах, при оформлении циферблатов часов и т.д.

1.7. Вопросы и ответы

1. Запишите в развернутом виде число $10203{,}405_7$.

   Решение. Из формул (1.7) и (1.8) следует, что

   $$10203{,}405_7 = 1\cdot 7^4 + 2\cdot 7^2 + 3 + 4\cdot 7^{-1} + 5\cdot 7^{-3} =$$
   $$= 1\cdot 7^4 + 2\cdot 7^2 + 3 + \frac{4}{7} + \frac{5}{7^3}.$$

2. Покажите, что любое натуральное число может быть представлено в виде суммы различных неотрицательных степеней числа 2.

   $51 = 2^5+2^4+2^1+2^0$
   $100 = 2^6+2^5+2^2$
   $1001 = 2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^3+2^0$

   Решение. Утвердительный ответ на этот вопрос следует из возможности перевода любого натурального числа в двоичную систему счисления, вид числа в которой, согласно формуле (1.7), и есть сумма степеней 2, включая нулевую степень, т.е. единицу.

3. В каких системах счисления $5_P + 5_P \neq 10_P$?

   Решение. Заметим, что рассматривать можно только системы счисления с основанием больше 5, так как в системах с основаниями 2, 3, 4 и 5 цифра 5 в алфавите отсутствует, и выражение не имеет смысла. В системах с $P = 6, 7, 8, 9$ — $5_P + 5_P > 10_P$, а при $P = 11, 12, \ldots$ — $5_P + 5_P < 10_P$ так как всегда $10_P = P$. Таким образом, равенство достигается лишь в десятичной системе счисления. В системах счисления с основанием $P>5$ рассматриваемое неравенство выполняется.

4. В каких системах счисления $2_P + 2_P = 4_P$?

   Решение. При решении этой задачи мы можем рассматривать лишь те системы счисления, в которых основание $P > 4$, так как во всех них цифра 4 входит в алфавит. Дважды прибавляя 1 к двойке, мы всегда получим 4 (правило (1) для прибавления 1 к натуральному числу в P-ичной системе счисления). Следовательно, исходное равенство достигается при любом $P > 4$.

5. Записать в системе счисления с основанием 234 число 235.

   Решение. Несмотря на то, что вид всех цифр в подобной системе счисления неизвестен, данное задание выполнить можно. Так как $234 = 10_{234}$, то, прибавив к нему 1, получим $235 = 11_{234}$.

6. Во сколько раз увеличится число 325_6, если приписать к нему справа один ноль?

   Решение. Добавление справа одного нуля к любому числу, записанному в P-ичной системе счисления, соответствует умножению на $10_P = P$, значит, в нашем случае число возрастет в 6 раз.

7. Как изменится запись P-ичной дроби с нулевой целой частью, если ее разделить на P^2?

   Решение. После запятой следует вписать два нуля, так как деление на $P^2 = 100_P$ соответствует умножению на $0{,}01_P$. Например, $0{,}03_5$ при делении на $25 = 100_5$ превратится в $0{,}0003_5$.

8. Будут ли справедливы признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 5, 9, 10, сформулированные для десятичной системы счисления, и в других P-ичных системах?

   Решение. Вообще говоря, нет. Например, наличие последнего нуля в P-ичной записи числа говорит о его делимости на P, а не на 10. Аналогично, в системах счисления с четными основаниями, четность последней цифры в записи числа, как и в десятичной системе, указывает на четность самого числа, а в остальных системах счисления это не так (данный факт легко доказать, используя формулу (1.7).

9. Число, записанное в десятичной системе счисления, оканчивается цифрой 5. Будет ли оно делиться на 5, если записать его в троичной системе счисления?

Решение. Будет, так как при этом оно останется тем же самым числом, которое можно единственным образом представить в виде произведения простых делителей, одним из которых в данном случае является 5 (по признаку делимости на 5 в десятичной системе), при этом неважно, в какой системе счисления делители представлены.

10. Существуют ли системы счисления с основаниями P и Q, в которых $12_P > 21_Q$?
Решение. Да, существуют. Для этого необходимо, чтобы $P + 2 > 2Q + 1$ (по формуле (1.7) мы записали каждое из чисел в развернутой форме), то есть $P > 2Q - 1$. Например, $P = 20$, $Q = 10$.

11. Для десятичного числа 371 найти систему счисления с основанием P, в которой данное число будет представлено теми же цифрами, но записанными в обратном порядке, т.е. $371 = 173_P$.
Решение. Согласно формуле (1.7) получаем уравнение $P^2 + 7P + 3 = 371$. Полученное уравнение имеет один целый положительный корень — 16, значит, искомой является шестнадцатеричная система счисления.

12. В **заданиях** к теме 3 части I приведена задача из книги Якова Перельмана «Занимательная математика» о чудаке математике. Рассмотрим ее решение.
Решение. Недесятичная система счисления — вот единственная причина кажущейся противоречивости приведенных чисел. Основание этой системы определяется фразой «...спустя год (после 44 лет) 100-летним молодым человеком...». Если при прибавлении 1 к числу 44 мы получаем 100, то цифра 4 — наибольшая в этой системе, как 9 — в десятичной. Следовательно, основанием системы является 5.

13. *(Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 1997 г.)*
Существует ли такая система счисления, в которой $3 + 4 = 7$, $3 \cdot 4 = 13$, и $39 + 29 = 70$?
Решение. Предположим, что такая система счисления существует, обозначим ее основание через Р. Тогда справедлива следующая система уравнений относительно P

$$\begin{cases} 3P^0 + 4P^0 = 7P^0, \\ 3P^0 + 4P^0 = P + 3P^0, \\ 3P + 9P^0 = 2P + 9P^0 = 7P. \end{cases}$$

Из двух последних уравнений следует, что $P = 9$.
Но в позиционной системе счисления с основанием 9 нет

цифры «9», т.е. в этой системе счисления нельзя записать числа 29 и 39.
Ответ: такой системы счисления не существует.

1.8. Контрольные вопросы и упражнения

1. Выпишите базис двадцатеричной системы счисления. Сколько весит каждая цифра в пятом разряде этой системы?
2. С применением каких позиционных систем счисления вы встречались?
3. Запишите год своего рождения с помощью римских цифр.
4. Придумайте и выпишите алфавит для 50-ричной системы счисления.
5. Придумайте свою позиционную систему счисления, базис которой не образует геометрическую прогрессию.
6. Опишите позиционную систему счисления, основывающуюся на числах Фибоначчи.
7. Сколько и каких требуется цифр, чтобы можно было любое число записать в пятеричной системе счисления? А в двенадцатеричной?
8. Запишите в 6-ричной системе счисления число, следующее по порядку за числом 5.
9. Какое число следует за числом 111_{14} в 14-ричной системе счисления?
10. Какое число предшествует числу 10_{18} в 18-ричной системе счисления?
11. Продолжите последовательность 1, 4, 7, A... . Объясните свой ответ.
12. Запишите в развернутом виде числа:
65_7; 1998_{10}; $0{,}15A_{16}$; $1AF1H{,}A9_{20}$.
13. Какое минимальное основание может иметь система счисления, если в ней записаны все четыре числа: 432; 120; 111; 2331?
14. Какие из следующих чисел имеют ошибки в записи:
211_3; 183_8; $A9A_{11}$; 341_5?
15. Какое из чисел больше: 5_{10} или 10_5; 1000_2 или 10_8?
16. В каком случае при прибавлении единицы к числу в P-ичной системе счисления, количество цифр в результате возрастет по сравнению с исходным числом? Может ли количество цифр возрасти больше, чем на одну?

17. Как будет выглядеть в двоичной системе счисления десятичное число 0,125?
18. Запишите в системе счисления с основанием 240 числа 241, 242, 243, 250, 251.
19. Подсчитайте количество двоичных чисел в диапазоне от 10_2 до 1000_2.
20. Подсчитайте количество троичных чисел в диапазоне от 12_3 до 1000_3.
21. Назовем круглыми все числа, записываемые одной цифрой и одним или несколькими нулями. Выпишите все двузначные и трехзначные круглые числа в 5-ричной системе счисления.
22. В какой (каких) системе счисления $2_P \cdot 2_P = 10_P$?
23. Во сколько увеличится число 32_4, если справа к нему приписать три нуля?
24. Выполните следующие действия: $100000_P : 1000_P$; $201_P : 100_P$.
25. В каких системах счисления 10 является нечетным числом?
26. Верно ли, что для любого трехзначного числа, задача 11 из параграфа 1.7 имеет решение?
27. Определите, в какой системе счисления произведена операция сложения 2102 + 211 = 10020. Докажите, что найденная система счисления единственная.
28. Докажите, что в любой позиционной системе счисления с основанием $P \geq 3$ число 121_P является полным квадратом.
29. В каких P-ичных системах счисления $\frac{1}{2}$ будет точно представлена конечной P-ичной дробью? А $\frac{1}{3}$?

Глава 2

Арифметические операции в позиционных системах счисления

2.1. Сложение и вычитание

В теоретическом отношении все позиционные системы счисления равноправны. Во всех них арифметические операции выполняются по одним и тем же правилам, согласно выписанным таблицам сложения и умножения. Для всех систем счисления справедливы одни и те же законы арифметики: коммутативный, ассоциативный, дистрибутивный, а также правила сложения, вычитания, умножения и деления столбиком, знакомые нам по действиям в десятичной системе счисления, опирающиеся на таблицы сложения и умножения десятичных цифр.

В P-ичной системе счисления таблица сложения представляет результаты сложения каждой цифры алфавита P-ичной системы с любой другой цифрой этой же системы. Составление подобной таблицы не составляет труда. Каждый элемент таблицы равен предыдущему в строке или в столбце, увеличенному на единицу по правилам прибавления единицы в P-ичной системе счисления (первые вычисляемые элементы в строке или столбце равны базовой цифре этой же строки или столбца, так как соответствуют прибавлению к ней нуля).

Наиболее простыми являются таблицы сложения в двоичной и троичной системах счисления:

+	0	1
0	0	1
1	1	10_2

Таблица сложения в двоичной системе счисления

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10_3
2	2	10_3	113

Таблица сложения в троичной системе счисления

Выпишем таблицу сложения в шестнадцатеричной системе счисления, опуская нижний индекс 16 в обозначении шестнадцатеричных чисел, из которых, собственно, и состоит данная таблица:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Таблица сложения в шестнадцатеричной системе счисления

Приведем примеры арифметических действий, выполненных согласно выписанным ранее таблицам сложения.

Пример 2.1. Сложение столбиком в двоичной системе счисления.

$$\begin{array}{r} 101{,}01_2 \\ +\ \ 1{,}11_2 \\ \hline 111{,}00_2 \end{array}$$

Пример 2.2. Сложение столбиком в троичной системе счисления.

$$\begin{array}{r} 21_3 \\ +\ 2{,}1_3 \\ \hline 100{,}1_3 \end{array}$$

Пример 2.3. Сложение столбиком в шестнадцатеричной системе счисления.

$$\begin{array}{r} F2A_{16} \\ +\ E9_{16} \\ \hline 1013_{16} \end{array}$$

Очевидно, что любая таблица сложения (умножения) в силу закона коммутативности симметрична относительно главной диагонали (линии, проведенной из левого верхнего угла таблицы в ее правый нижний угол).

Имея перед собой соответствующую таблицу сложения, можно осуществлять действия сложения и вычитания столбиком в любой P-ичной системе счисления. Несложно показать, что если результат сложения двух цифр в P-ичной системе счисления больше, чем P–1 (то есть полученное число — двузначное), то левая цифра всегда равна 1, так как при сложении даже двух самых больших цифр алфавита мы имеем

$$(P-1)+(P-1)=2P-2=1[P-2]_P.$$

Например, в четверичной системе счисления $3+3=12_4$.

Следовательно, при сложении столбиком цифр справа налево в любой системе счисления в следующий разряд может переходить только единица, а результат выполнения сложения в новом разряде все равно будет меньше, чем $2P$ (максимум $2P-1=1[P-1]_P$). То есть, результат сложения двух положительных P-ичных чисел либо имеет столько же цифр, сколько и максимальное из двух слагаемых, либо на одну цифру больше, но этой цифрой может быть только единица.

Вычитание в P-ичной системе счисления можно производить столбиком аналогично вычитанию в десятичной системе. Для выполнения этой операции будем также использовать таблицу сложения в P-ичной системе счисления.

Нам требуется выполнить операцию $a-b$, где a и b — цифры P-ичной системы счисления.

1) По таблице сложения выбираем столбец для цифры b. В этом столбце ищем цифру a. В строке с цифрой a выбираем цифру в самом первом (левом) столбце. Это и будет результатом вычитания.

2) Если же $a<b$, то, занимая единицу из левого разряда, мы придем к необходимости выполнения следующего действия: $10_P+a-b=1a_P-b$. Для этого в столбце для цифры b таблицы сложения мы уже ищем число $1a_P$, а первая цифра в соответствующей строке является результатом вычитания.

Пример 2.4. Вычитание в двоичной системе счисления.

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ -\ 10{,}1_2 \\ \hline 10{,}1_2 \end{array}$$

Пример 2.5. Вычитание в троичной системе счисления.

$$\begin{array}{r} 210_3 \\ -102_3 \\ \hline 101_3 \end{array}$$

Пример 2.6. Вычитание в шестнадцатеричной системе счисления.

$$\begin{array}{r} A10_{16} \\ -\ 102_{16} \\ \hline 90E_{16} \end{array}$$

Если же таблицы сложения в P-ичной системе у вас под рукой нет, а в ее алфавите достаточно много цифр, что затрудняет выписывание полной таблицы, или требуется провести всего одно-два арифметических действия в данной системе счисления, то возможен и другой подход к выполнению арифметических операций.

А именно: переведем каждое из слагаемых (или уменьшаемое и вычитаемое) в десятичную систему счисления, произведем требуемое действие в десятичной системе, а результат запишем в исходной P-ичной системе счисления. С правилами перевода из одной системы счисления в другую можно подробно познакомиться в главе 3.

Очевидно, что аналогичным способом можно поступать и при выполнении действий умножения и деления, но в следующих параграфах мы рассмотрим их выполнение непосредственно в P-ичной системе счисления, так как данные операции окажутся необходимыми для дальнейшего рассмотрения.

2.2. Умножение

Для выполнения умножения двух многозначных чисел в P-ичной системе надо иметь таблицу умножения в этой системе.

Вычисление элементов такой таблицы представляет собой прибавление базовой цифры столбца к числу, стоящему на одну клетку выше. При этом неопределенными оказываются лишь элементы первой строки (они не имеют вышестоящих клеток), однако, первая строка соответствует умножению базовой цифры строки на 0, результат такого умножения в любой системе счисления равен 0.

Приведем таблицы умножения для двоичной, троичной и шестнадцатеричной систем, опуская нижние индексы, указывающие на принадлежность к соответствующей системе счисления (базовые цифры выделены):

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Таблица умножения в двоичной системе счисления

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Таблица умножения в троичной системе счисления

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Таблица умножения в шестнадцатеричной системе счисления

Приведем примеры выполнения умножения в двоичной, троичной и шестнадцатеричной системах. Действия производятся по правилам умножения столбиком с последовательным умножением цифр первого сомножителя на второй сомножитель, при этом используются выписанные выше таблицы умножения для перечисленных систем счисления.

Пример 2.7

$$\begin{array}{r} 10100_2 \\ \times\ 1010_2 \\ \hline 101 \\ +\ 101 \\ \hline 11001000_2 \end{array}$$

В данном примере, как и при десятичном умножении столбиком, умножение на 0 не производится, а все оставшиеся справа нули, не участвующие в умножении, приписываются справа к результату умножения.

Пример 2.8

$$\begin{array}{r} 212_3 \\ \times\ 1210_3 \\ \hline 212 \\ +\ 1201 \\ \hline 12222 \\ +\ 212 \\ \hline 1111220_3 \end{array}$$

Здесь показано, что если складывать столбиком приходится три и более слагаемых, то действия сложения можно производить последовательно, в противном случае сложные вычисления в непривычной системе счисления обычно порождают ошибки.

Пример 2.9. Умножение в 16-ричной системе счисления.

```
  FFA,3_16
×   D,E_16
 DFAE A
CFB47
DDAF,5A_16
```

При умножении P-ичных дробей, количество цифр в дробной части результата равно сумме числа цифр в дробной части каждого из множителей (если одна или более крайних справа цифр результата окажутся равны нулю, то их можно опустить как незначащие).

С помощью таблицы умножения в шестнадцатеричной системе можно сформулировать признаки делимости на 2, 3, 5, 8, A, F в шестнадцатеричной системе счисления.

Так, шестнадцатеричное число делится на 2, если последняя цифра является четной (кроме четных десятичных цифр четными здесь также являются цифры A, C и E).

Число делится на 3, 5 или F, если сумма его цифр делится на 3, 5 и F соответственно (аналогично 3 и 9 в десятичной системе).

Делимость на A предполагает наличие последней четной цифры и сумму цифр, делящуюся на 5.

Если последняя цифра шестнадцатеричного числа равна 0 или 8, то число делится на 8 (аналогично 5 в десятичной системе).

2.3. Деление

При делении столбиком в P-ичной системе счисления приходится в качестве промежуточных вычислений выполнять действия умножения и вычитания, а, следовательно, используются как таблица умножения, так и сложения в P-ичной системе счисления.

Пример 2.10. Наиболее просто деление организовать в двоичной системе, так как в ней необходимо лишь сравнивать два числа между собой и вычитать из большего числа меньшее.

```
 11110_2 |110_2
-110_2   |101_2
  110
 -110
    0
```


Пример 2.11. Деление столбиком в шестнадцатеричной системе счисления.

```
 F127_16 |8_16
-8       |1E24,E_16
 71
-70
  12
 -10
   27
  -20
    70
   -70
     0
```

Сложнее дело обстоит, если результат деления не является конечной P-ичной дробью (или целым числом). Тогда при осуществлении операции деления обычно требуется выделить непериодическую часть дроби и ее период. Продемонстрируем это на следующих примерах.

Пример 2.12. Деление в троичной системе счисления.

```
 10_3 |2_3
- 2   |1,(1)_3
  10
 - 2
   1
```

Так как результат последнего вычитания совпал с предыдущим, то все остальные цифры дробной части результата совпадут с последней найденной цифрой. Повторяющаяся цифра образует период троичной дроби.

Пример 2.13. Рассмотрим еще один пример деления, выполненного в двоичной системе счисления. Предварительно заметим, что в общем случае неизвестно, получим мы конечную дробь или бесконечную периодическую.

```
 1010_2 |11_2
- 11_2  |11,0101.._2 = 11,(01)
  100
 - 11
   100
  - 11
    100
   - 11
      1
```

В этом примере период дроби состоит из двух цифр. Для определения периода можно выполнять деление до тех пор, пока не будет заметно повторение группы цифр в результате, или на каком-то этапе вычислений результат последнего вычитания совпадет с неким предыдущим (но встречавшимся ранее при подсчете именно дробной части). Следовательно, все остальные цифры дробной части результата будут повторяться такими же группами. Повторяемая группа и образует период дроби, в данном случае двоичной.

Умение выполнять операцию деления в P-ичной системе счисления окажется полезным в дальнейшем при переводе дробных чисел из одной системы счисления в другую.

2.4. Вопросы и ответы

1. Подсчитайте сумму троичных чисел в диапазоне от 10_3 до 100_3, включая границы диапазона. Ответ запишите в троичной системе счисления.

   Решение. Для решения этой задачи выпишем все троичные числа, попадающие в указанный диапазон: 10_3, 11_3, 12_3, 20_3, 21_3, 22_3, 100_3. Теперь нам надо найти сумму этих чисел. Будем выполнять сложение последовательно в троичной системе счисления (нижний индекс 3 опускаем). Перенос в следующий разряд делаем, если в разряде получилось число, большее или равное трем.

```
  10 +  11 =   21;
  21 +  11 =  102;
 102 +  12 =  121;
 121 +  20 =  211;
 211 +  21 = 1002;
1002 +  21 = 1101;
1101 +  22 = 1200;
1200 + 100 = 2000.
```

2. Восстановите цифры двоичных чисел, на месте которых в приведенном примере стоит знак «*»:

   $1{*}01_2 + 1{*}{*}_2 = 10100_2$.

   Решение. Запишем этот пример на сложение столбиком (нижний индекс 2 опускаем):

```
 1*01
+ 1**
-----
1*100
```

   Отметим, что вместо «*» может стоять либо «0», либо «1», так как мы работаем в двоичной системе счисления.

   Будем анализировать проведенную операцию поразрядно, начиная с самого младшего (нулевого) разряда.

   0-ой разряд: 1 + * = 0, так как значение младшего разряда суммы ноль, то произошел перенос в следующий разряд, следовательно, вместо «*» надо поставить «1»: $1 + 1 = 10\ 2$.

   1-ый разряд: учитывая перенос из 0-го разряда, запишем $0 + * + 1_{\text{перенос}} = 0$. Очевидно, что вместо «*» надо поставить «1», так как и здесь произошел перенос в следующий разряд. Получаем $1 + 1 = 10_2$, т.е. ноль в текущем разряде и перенос единиц в следующий разряд.

   2-ой разряд: учитывая перенос из 1-го разряда, запишем $* + 1 + 1_{\text{перенос}} = 1$. Т.к. $1 + 1 = 10_2$, а в результате стоит единица, а не ноль, следовательно, вместо «*» должна стоять «1» и опять произошел перенос единицы в следующий разряд.

   3-ий разряд: учитывая перенос из 2-го разряда, запишем $1 + 1_{\text{перенос}} = *$. Т.к. $1 + 1 = 10_2$, то «*» заменяем на «0» и запоминаем, что произошел перенос единицы в следующий разряд.

   4-ый разряд: ни в одном из слагаемых нет значащей цифры в 4-ом разряде, «1», стоящая в 4-ом разряде суммы получена за счет переноса, и мы верно восстановили недостающие цифры.

   Ответ: 1101 + 111 = 10100.

3. Выпишите в пятеричной системе счисления все четные числа из диапазона от 1 до 20.

   Решение. Для решения этой задачи надо, во-первых, выписать все числа, попадающие в указанный интервал, а, во-вторых, знать, какие числа являются четными.

   Выпишем все числа, попадающие в указанный интервал:

   1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20.

   Число называется четным, если оно делится на два без остатка. Чтобы выполнить операцию деления в пятеричной системе счисления, надо иметь таблицу умножения в пятеричной системе. Но эту задачу можно решить гораздо проще. Так как числа выписаны подряд в порядке возрастания и последовательность чисел начинается с нечетного числа, то каждое второе число будет четным.

   Ответ: четные числа — 2, 4, 11, 13, 20.

2.5. Контрольные вопросы и упражнения

1. Выпишите таблицы сложения и умножения в пятеричной и двенадцатеричной системах счисления.
2. Выполните следующие действия сложения:
   $11010101_2 + 1110_2$; $1234_5 + 4321_5$; $ABBA_{12} + BABA_{12}$.
3. Выполните следующие действия вычитания:
   $11010101_2 - 1110_2$; $4321_5 - 1234_5$; $BABA_{12} - ABBA_{12}$.

4. Выполните следующие действия умножения:
$11010101_2 \cdot 1110_2$; $4321_5 \cdot 123_5$; $ABBA_{12} \cdot 10A_{12}$.
5. Выполните следующие действия деления:
$10010000_2 : 1110_2$; $4322_5 : 3_5$; $AB06_{12} : A_{12}$.
6. Восстановите цифры двоичной системы счисления, на месте которых в приведенных ниже арифметических действиях стоит знак «*»:
а) $**0*0*1**1_2 + 10111*10**_2 = 100*1*00010_2$;
б) $***0**00_2 - 11*11*11_2 = 1101*1_2$.
7. Подсчитайте сумму двоичных чисел в диапазоне от 100_2 до 111_2, включая границы диапазона. Ответ запишите в двоичной системе счисления.
8. Подсчитайте сумму шестнадцатеричных чисел в диапазоне от 100_{16} до $1A1_{16}$, включая граничные числа. Ответ запишите в шестнадцатеричной системе счисления.
9. Найдите среднее арифметическое троичных чисел из диапазона от 10_3 до 100_3, включая границы диапазона. Ответ запишите в троичной системе счисления.
10. Найдите сумму шестнадцатеричных чисел

$$F,1 + E,2 + D,3 + C,4 + B,5 + A,6 + 6,A + 5,B + 4,C + 3,D + 2,E + 1,F.$$

Ответ запишите в десятичной системе счисления.
11. Даны числа в четверичной системе счисления от 1 до 33. Выпишите все нечетные числа.

12. Выполните следующие действия деления с выделением непериодической части и периода: $11_2 : 101_2$; $10010101_2 : 1110_2$; $10_3 : 11_3$; $4321_5 : 3_5$.
13. Сформулируйте какие-нибудь признаки делимости в двенадцатеричной системе счисления.
14. Даны числа в четверичной системе счисления от 1 до 33. Выпишите все числа, делящиеся на 3 без остатка.

Глава 3

Перевод чисел из одной позиционной системы счисления в другую

3.1. Перевод целого числа из P-ичной системы счисления в десятичную

Число a записано в P-ичной системе счисления: $a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$. Требуется получить запись этого числа в десятичной системе счисления. Для решения этой задачи представим число в развернутой форме: $a = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0$ (формула 1.7). Для того чтобы получить значение этого многочлена, записанное в десятичной системе счисления, следует число P и коэффициенты при степенях P (цифры P-ичного числа) записать в виде десятичных чисел и все вычисления провести в десятичной системе. Данный способ можно сформулировать в виде следующего алгоритма.

Алгоритм перевода целых чисел из P-ичной системы счисления в десятичную:

1) *каждая цифра числа в P-ичной системы счисления переводится в число в десятичной системе;*
2) *полученные числа нумеруются справа налево, начиная с нуля (номера соответствуют степеням P в многочлене 1.7);*
3) *десятичное число, соответствующее каждой P-ичной цифре, умножается на P^k, где k — номер этого числа (см. (2)), и результаты складываются, причем все эти арифметические действия проводятся в десятичной системе.*

Пример 3.1. Переведем число $B0F9_{16}$ в десятичную форму записи:

$$B0F9_{16} = [11_{10}][0][15_{10}][9] =$$
$$= 11_{10} \cdot 16^3_{10} + 15_{10} \cdot 16_{10} + 9 = 45305_{10}.$$

Здесь цифра B была заменена на десятичное число 11, а цифра F — на 15. Согласно пункту (2) алгоритма перевода, числа были пронумерованы так: 9 — коэффициент при нулевой степени многочлена, 15 — при первой, 0 — при второй (т.е. такая степень в многочлене отсутствует), 11 — при третьей.

При вычислении значения P-ичного числа по развернутой форме удобно пользоваться ***схемой Горнера***, которая позволяет получить результат с использованием минимального числа арифметических операций сложения и умножения (операция возведения в степень не используется). Схема Горнера основана на следующих преобразованиях исходного степенного ряда (многочлена):

$$\begin{aligned} R &= a_nP^n+a_{n-1}P^{n-1}+...+a_1P^1+a_0 = (a_nP^{n-1}+a_{n-1}P^{n-2}+...+a_1)P+a_0 = \\ &= ((a_nP^{n-2}+a_{n-1}P^{n-3}+...+a_2)P+a_1)P+a_0 = \\ &= (((a_nP^{n-3}+a_{n-1}P^{n-4}+...+a_3)P+a_2)P+a_1)P+a_0 = \\ &\dots \\ &= (\dots(((a_nP+a_{n-1})P+a_{n-2})P+a_{n-3})P+...a_1)P+a_0 . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Применим общую схему Горнера в конкретном случае.

Пример 3.2. Переведем в десятичную систему число 2143_5.

$$2143_5 = 2{\cdot}5^3 + 1{\cdot}5^2 + 4{\cdot}5 + 3 = ((25 + 1)5 + 4)5 + 3 = 298_{10}.$$

Описанный алгоритм перевода чисел из P-ичной системы в десятичную для ***двоичной*** системы счисления сводится к следующему: для того чтобы перевести число из двоичной системы счисления в десятичную, надо в десятичной системе счисления сложить те степени двоек, которые соответствуют единицам в записи исходного двоичного числа. Нумерация степеней, как и ранее, ведется справа налево, начиная с нулевой.

Пример 3.3. Переведем число 1001101_2 в десятичное.

$$1001101_2 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 77_{10}.$$

При программировании на различных алгоритмических языках операцию перевода целых чисел из двоичной системы в десятичную производить приходится довольно часто, поэтому очень полезным оказывается знание первых шестнадцати степеней двойки:

$2^3 = 8;$	$2^{10} = 1024;$
$2^4 = 16;$	$2^{11} = 2048;$
$2^5 = 32;$	$2^{12} = 4096;$
$2^6 = 64;$	$2^{13} = 8192;$
$2^7 = 128;$	$2^{14} = 16384;$
$2^8 = 256;$	$2^{15} = 32768;$
$2^9 = 512;$	$2^{16} = 65536.$

3.2. Перевод конечной *P*-ичной дроби в десятичную

Перевод конечных дробей аналогичен переводу целых чисел и основан на представлении числа в развернутой форме (формула 1.8).

Дана правильная конечная дробь b в P-ичной системе счисления, т.е. $b = 0{,}b_{-1}b_{-2}...b_{-k}$. Требуется получить запись этой дроби в десятичной системе счисления.

Для решения этой задачи представим дробь в развернутой форме $b = b_{-1}P^{-1} + b_{-2}P^{-2} + ... + b_{-k}P^{-k}$ (формула 1.8). Для того чтобы вычислить значение многочлена в десятичной системе счисления, следует число P и коэффициенты многочлена (цифры P-ичного числа) записать в виде десятичных чисел и все вычисления проводить в десятичной системе. Запишем эти правила в виде алгоритма.

Алгоритм перевода конечной *P*-ичной дроби в десятичную

1) *целая часть числа переводится в десятичную систему отдельно (см. параграф 3.1);*
2) *каждая цифра дробной части числа в P-ичной системе счисления переводится в число в десятичной системе;*
3) *полученные в результате преобразования дробной части числа нумеруются слева направо, начиная с единицы;*
4) *десятичное число, соответствующее каждой P-ичной цифре, умножается на P^{-k}, где k — номер этого числа (см.(3) и результаты складываются, причем все эти арифметические действия проводятся в десятичной системе.*

Пример 3.4. Переведем число $0{,}B0F9_{16}$ в десятичную систему счисления.

$$\begin{aligned} 0{,}B0F9_{16} &= 0{,}[11_{10}][0][15_{10}][9] = 11{\cdot}16^{-1} + 15{\cdot}16^{-3} + 9{\cdot}16^{-4} = \\ &= 0{,}6912994384765625_{10} \end{aligned}$$

Здесь, согласно пункту (3) алгоритма числа были пронумерованы так: 11 — номер один (коэффициент при P в степени минус один), 15 — номер три, 9 — номер четыре.

При вычислении десятичного значения P-ичной дроби по развернутой форме также рекомендуется пользоваться ***схемой Горнера***, что минимизирует количество необходимых арифметических действий, среди которых теперь присутствует и деление.

Получим схему Горнера для вычисления значения P-ичной дроби, выписав цифры дроби в представлении (1.8) в обратном порядке:

$$b_{-k}P^{-k}+b_{-k+1}P^{-k+1}+...+b_{-1}P^{-1}=(b_{-k}P^{-k+1}+b_{-k+1}P^{-k+2}+...+b_{-1})P^{-1}=$$
$$=((b_{-k}P^{-k+2}+b_{-k+1}P^{-k+3}+...+b_{-2})P^{-1}+b_{-1})P^{-1}=$$
$$...$$
$$=(...(((b_{-k}P^{-1}+b_{-k+1})P^{-1}+b_{-k+2})P^{-1}+b_{-k+3})P^{-1}+...b_{-1})P^{-1} \quad (3.2)$$

Пример 3.5. Вычислим значение двоичной дроби $0{,}1101_2$, используя схему Горнера.

$$0{,}1101_2=1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+0\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-4}=1\cdot 2^{-4}+0\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-1}=$$
$$=(((1\cdot 2^{-1}+0)2^{-1}+1)2^{-1}+1)2^{-1}=(((\frac{1}{2}+0):2+1):2+1):2=$$
$$=((\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1):2+1):2=(1{,}25:2+1):2=(0{,}625+1):2=0{,}8125.$$

Конечную P-ичную дробь не всегда можно представить в виде конечной десятичной. Так, если среди простых делителей основания системы счисления P содержатся какие-нибудь числа кроме 2 и 5, то в общем случае сделать это будет невозможно, и нахождение значения десятичной дроби по формуле (1.8) будет затруднено. В этом случае исходную P-ичную дробь удобно представить в виде обыкновенной дроби, числителем которой будет являться число, стоящее после запятой, а знаменателем — P в степени, соответствующей цифре с максимальным номером (согласно правилу нумерации (3) алгоритма перевода дроби в десятичную систему). Затем числитель и знаменатель записываются в десятичной системе (для перевода в десятичную систему числителя следует воспользоваться правилами параграфа 3.1), и мы получаем обыкновенную дробь в десятичной системе счисления. При необходимости, ее можно записать в виде периодической десятичной дроби, выделяя непериодическую часть и период.

Пример 3.6. Переведем число $0{,}1A_{15}$ в десятичную систему счисления.

$$0{,}1A_{15}=\frac{1A_{15}}{15^2_{10}}=\frac{25_{10}}{225_{10}}=\frac{1_{10}}{9_{10}}=0{,}(1)_{10}$$

На самом деле последний способ является вторым универсальным способом ***перевода конечных P-ичных дробей в десятичные***, его можно использовать также и в случае, когда получаемая десятичная дробь в результате преобразования ее из обыкновенной окажется конечной.

Пример 3.7. Переведем число $0{,}13_{15}$ в десятичную систему счисления.

$$0{,}13_{15}=\frac{13_{15}}{15^2_{10}}=\frac{18_{10}}{225_{10}}=\frac{2_{10}}{25_{10}}=0{,}08_{10}.$$

3.3. Перевод бесконечной периодической P-ичной дроби в десятичную

Напомним, что ***бесконечная*** дробь называется ***периодической***, если в ее записи можно выделить последовательно повторяющуюся группу цифр. Минимальная последовательно повторяющаяся группа цифр после запятой в записи числа называется ***периодом***. Период принято записывать один раз, заключая его в круглые скобки:

$$0{,}67132181321813218... = 0{,}67(13218).$$

Если период начинается сразу после запятой, то дробь принято называть ***чисто периодической***.

Задача перевода такой дроби в десятичную систему, кажущаяся на первый взгляд очень сложной, имеет по крайней мере три различных способа решения, один из которых чисто алгебраический. Причем все три способа касаются лишь преобразования периода, а непериодическую дробную часть из P-ичной системы счисления в десятичную следует переводить отдельно, используя один из алгоритмов, описанных в предыдущем параграфе.

<u>Способ 1.</u> Пусть непериодическая часть у P-ичной дроби отсутствует и дробь имеет вид $a=0{,}(a_1a_2...a_k)_P$, т.е. a — чисто периодическая дробь. Умножим эту дробь на P^k, то есть передвинем запятую на k позиций вправо. В результате мы получим некоторое число b:

$$b=aP^k=a_1a_2...a_k,\ (a_1a_2...a_k)_P=a_1a_2...a_k+a.$$

Отсюда очевидна связь между числами a и b, что и позволяет нам составить следующее уравнение:

$$P^k\cdot a=a+a_1a_2...a_k.$$

Преобразовав его, находим, что $a=\dfrac{a_1a_2...a_k}{P^k-1}$. В результате для записи числа a мы получили обыкновенную дробь, в которой знаменатель записан в десятичной системе счисления, а числитель — в P-ичной. Переводя теперь целое P-ичное число $a_1a_2...a_k$ (это наш числитель) в десятичную систему, мы получим обыкновенную дробь, записанную в десятичной системе счисления, равную исходному числу a. При необходимости ее можно перевести в десятичную дробь.

Пример 3.8. Пусть $a = 0{,}(1001)_2$, требуется перевести ее в десятичную дробь. Длина периода равна 4, поэтому умножаем дробь на 2^4. Получим

$$b = 2^4a = 1001{,}(1001)_2 = a + 1001_2.$$

В результате мы получаем уравнение $16a = a + 9$, из которого находим $a = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

При наличии непериодической части вычисления изменятся незначительно. Пусть периодическая P-ичная дробь b имеет вид: $b = 0{,}c_1c_2...c_n(a_1a_2...a_k)_P$. Обозначим через a следующую дробь: $a = 0{,}(a_1a_2...a_k)_P$. Тогда исходную дробь можно выразить через a следующим образом:

$$b = P^{-n}a + 0{,}c_1c_2...c_n$$

(сдвигаем период дроби a на n P-ичных разрядов вправо и прибавляем непериодическую часть).

Затем переведем отдельно в десятичную систему конечную дробь $0{,}c_1c_2...c_n$ (см. параграф 3.2). И отдельно переведем в десятичную систему число $a = 0{,}(a_1a_2...a_k)_P$ так, как это было описано в данном параграфе выше.

Пример 3.9. Перевести в десятичную систему дробь $0{,}10(1001)_2$. Непериодическая часть содержит две цифры, следовательно, надо выполнить следующие действия

$$0{,}10(1001)_2 = 2^{-2}\cdot 0{,}(1001)_2 + 0{,}1_2 = 2^{-2}\cdot 0{,}6_{10} + 0{,}1_2 =$$
$$= 0{,}25_{10}\cdot 0{,}6_{10} + 0{,}5_{10} = 0{,}65_{10}.$$

Пример 3.10. Перевести в десятичную систему дробь $0{,}00(1001)_2$.

Непериодическая часть этой двоичной дроби состоит из двух нулей, но ее нельзя считать отсутствующей, так как она определяет сдвиг периода.

$$0{,}00(1001)_2 = 2^{-2}\cdot 0{,}(1001)_2 = 2^{-2}\cdot 0{,}6_{10} = 0{,}15_{10}.$$

<u>**Способ 2.**</u> Запишем исходную бесконечную периодическую дробь в виде следующей бесконечной суммы:

$$0{,}c_1c_2...c_n(a_1a_2...a_k)_P = 0{,}c_1c_2...c_n +$$
$$+ P^{-n-k}a_1a_2...a_k + P^{-n-2k}a_1a_2...a_k + P^{-n-3k}a_1a_2...a_k + \ldots .$$

За исключением непериодической части, данное выражение соответствует сумме бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = P^{-k} < 1$ и первым членом $P^{-n-k}a_1a_2...a_k$. Как известно, сумма такой прогрессии конечна и равна

$$\frac{P^{-n-k}a_1a_2\ldots a_k}{1-P^{-k}} = \frac{P^{-n-k}a_1a_2\ldots a_k}{1-\dfrac{1}{P^k}} = \frac{a_1a_2\ldots a_k}{P^{n+k}\cdot\dfrac{P^k-1}{P^k}} = \frac{a_1a_2\ldots a_k}{P^n\cdot(P^k-1)}.$$

Остается лишь записать числитель и знаменатель полученного отношения в десятичной системе счисления и прибавить к результату непериодическую часть дроби, предварительно переведенную в десятичную систему.

Пример 3.11. Перевести в десятичную систему дробь $0{,}10(1001)_2$ вторым способом.

$$0{,}10(1001)_2 = 0{,}1_2 + 2^{-6}\cdot 1001_2 + 2^{-10}\cdot 1001_2 + 2^{-14}\cdot 1001_2 + \ldots .$$

Легко увидеть, что слагаемые этой бесконечной суммы, начиная со второго, представляют собой бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 2^{-4}$ и первым членом $b = 2^{-6}\cdot 1001_2$. Сумма этой бесконечной прогрессии равна $\dfrac{2^{-6}\cdot 1001_2}{1-2^{-4}}$.

Переведем числитель полученной величины в десятичную систему счисления: $2^{-6}\cdot 1001_2 = 2^{-6}(2^3 + 1) = 2^{-6}\cdot 9$.

Тогда

$$0{,}10(1001)_2 = 0{,}1_2 + \frac{9}{4(2^4-1)} = 0{,}5 + \frac{9}{4\cdot 15} = 0{,}65_{10}.$$

<u>**Способ 3.**</u> Воспользуемся вторым (периодическим) представлением конечных вещественных дробей (см. параграф 1.4) и представим единицу в виде $1 = 0{,}(P_1)_P$, здесь $P_1 = [P-1]$ — максимальная цифра в P-ичной системе счисления. Аналогично единицу можно записать с помощью k периодически повторяющихся максимальных цифр P-ичной системы счисления, где k — количество цифр в периоде интересующей нас исходной P-ичной дроби, например:

$$1 = 0{,}(\underbrace{1\ldots1}_{k})_2;\quad 1 = 0{,}(\underbrace{4\ldots4}_{k})_5;\quad 1 = (\underbrace{F\ldots F}_{k})_{16};\quad 1 = 0{,}(\underbrace{P_1\ldots P_1}_{k})_P.$$

Тогда $a = \dfrac{a}{1} = \dfrac{0{,}(a_1a_2\ldots a_k)_P}{0{,}(P_1\ldots P_1)_P} = \dfrac{a_1a_2\ldots a_k}{P_1\ldots P_1}.$

Последняя обыкновенная дробь записана в P-ичной системе счисления. Для преобразования ее в десятичную дробь числитель и знаменатель переводятся по правилам параграфа 3.1 в десятичную систему счисления, и уже в ней числитель делится на знаменатель.

Пример 3.12. Переведем двоичную периодическую дробь в десятичную по способу 3.

$$0,(1001)_2 = \frac{1001_2}{1111_2} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

При наличии непериодической части у исходной P-ичной дроби мы будем поступать так же, как и в первом способе перевода.

Пример 3.13

$$0,10(1001)_2 = 0,1_2 + 2^{-2}\,\frac{1001_2}{1111_2} = 0,5 + \frac{9}{4\cdot 15} = 0,65_{10}.$$

Таким образом, в третьем способе перевода периодических P-ичных дробей в десятичную систему сложным является лишь его обоснование, а вычисления, по сравнению с первыми двумя способами, наоборот, оказываются довольно простыми.

3.4. Перевод целого числа из десятичной системы счисления в P-ичную

Как и в большинстве уже рассмотренных в данной главе задач, существуют по крайней мере два способа организации вычислений при решении этой проблемы.

<u>Способ 1.</u> Запишем число a в P-ичной системе счисления в развернутой форме (1.7): $a = a_nP^n + a_{n-1}P^{n-1} + \ldots + a_1P + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ пока неизвестны. Тогда разделив с остатком a на P, получаем целое частное

$$a_nP^{n-1} + a_{n-1}P^{n-2} + \ldots + a_1 \qquad (3.3)$$

и a_0 в остатке, который не превышает $P-1$. Таким образом, мы получили последнюю цифру в P-ичной записи числа a. Разделив полученное частное (3.3) вновь на P, получим в остатке значение a_3, а $a_nP^{n-2} + a_{n-1}P^{n-3} + \ldots + a_2$ — новое частное. Таким образом, мы получили уже предпоследнюю цифру в P-ичной записи числа a. Продолжим этот процесс до тех пор, пока результат деления не станет равен нулю. Более формально данный способ можно записать так.

Алгоритм перевода целого числа из десятичной системы счисления в P-ичную

1) *делим исходное число a на P нацело в десятичной системе и записываем в качестве нового значения десятичного числа a целую часть результата от деления;*
2) *остаток от деления заменяем на соответствующую цифру в P-ичной системе счисления и приписываем ее слева к полученным ранее цифрам в P-ичной записи числа a (первая полученная цифра соответствует младшему разряду и ее мы просто записываем);*
3) *выполняем пункты (1) и (2) до тех пор, пока число a не станет равным 0.*

Пример 3.14. Переведем число 123 в троичную систему счисления:

```
123:3 = 41(0)
 41:3 = 13(2)
 13:3 =  4(1)
  4:3 =  1(1)
  1:3 =  0(1)
```

здесь и далее в скобках указано значение остатка от деления, следовательно, последняя цифра в троичном представлении числа 123 равна 0.

Ответ: $123 = 11120_3$.

Пример 3.15. Переведем это же число в шестнадцатеричную систему счисления:

```
123:16 = 7(11)
  7:16 = 0(7)
```

Заменив число 11 на шестнадцатеричную цифру B, получим в результате $123 = 7B_{16}$.

Типичные ошибки при реализации такого алгоритма следующие: нарушение порядка записи получаемых цифр (часто их ошибочно записывают слева направо, а не справа налево); неправильное выписывание крайней слева цифры (про нее либо забывают, так как в результате последнего деления уже получается ноль целых, либо получают неверно при выполнении той же операции деления с остатком меньшего числа на большее).

<u>Способ 2.</u> Он основан на выделении максимальной степени числа P в исходном десятичном числе.

Заменим в записи (1.7) все цифры на максимальную (равную $P - 1$) и покажем, что и в этом случае число, состоящее из ($n + 1$)-ой цифры в P-ичной системе счисления строго меньше, чем P^{n+1} (очевидно, что $a_n \geq 1$ такое число также не меньше, чем P^n, так как):

$$P^n \leq a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0 \leq$$

$$\leq (P-1)P^n + (P-1)P^{n-1} + \ldots + (P-1)P + (P-1) =$$

$$= P^{n+1} - P^n + P^n - P^{n-1} + \ldots + P^2 - P + P - 1 =$$

$$= P^{n+1} - 1 < P^{n+1}.$$

Тогда, для того чтобы определить левую цифру в P-ичной записи числа — a_n, необходимо найти такую степень числа P, для которой выполняются неравенства: $P^n \leq a < P^{n+1}$, то есть a_n будет равно целой части от деления a на P_n. Остатком же от такого деления является число

$$a_{n-1} \cdot P^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot P + a_0 \geq 0.$$

Обозначим его, как и раньше, a. Если оно равно нулю, то и все цифры a_{n-1}, $\ldots a_1$, a_0 равны 0, и вычисления заканчиваются, в противном случае мы опять ищем максимальную степень k числа P, для которой справедливо:

$$P^k \leq a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0 < P^{k+1} \leq P^n.$$

Тогда $n-1-k$ следующих за a_n цифр будут равны нулю (при $n - 1 = k$ нулевые цифры между a_n и a_k отсутствуют), а a_k получаем в результате деления нацело a на P^k. Пока остаток от такого деления не окажется равен нулю, будем продолжать описанные действия.

Пример 3.16. Переведем данным способом число 100 в двоичную систему счисления.

Используя таблицу степеней двойки, запишем неравенство $2^6 < 100 < 2^7$. Следовательно, двоичная запись числа 100 будет состоять из 7 цифр. Остаток от деления 100 на 2^6 равен 36. Так как $2^5 < 3^6 < 2^6$, то и вторая слева цифра равна единице. Остаток же от деления 36 на 2^5 равен $4 = 2^2$, то есть третья и четвертая, а также шестая и седьмая цифры в двоичной записи числа 100 нулевые, а $100_{10} = 1100100_2$.

Пример 3.17. Переведем в шестнадцатеричную систему число 525.

Используя таблицу степеней числа 16, запишем неравенство $256 = 16^2 < 525 < 16^3$. Запись числа 525 в шестнадцатеричной системе будет иметь три цифры. Разделим 525 на 256 и получим 2 целых и 13 в остатке, следовательно, старшая цифра в шестнадцатеричной записи 525 — 2. В силу того что $13 < 16^1$, вторая цифра в шестнадцатеричном представлении 525 равна 0. Заменяем 13 на соответствующую шестнадцатеричную цифру D, в результате получаем $525 = 20D_{16}$.

Заметим, что второй способ перевода эффективен лишь тогда, когда нам уже известны значения всех степеней числа P, которые не превосходят исходное число. Но преимущество такого метода состоит в естественном порядке записи получившихся P-ичных цифр (слева направо), что бывает важно при программировании: очередная полученная цифра сразу же может выводиться на печать. В первом же способе перевода все цифры требуют предварительного запоминания для последующей распечатки результата в порядке, обратном их получению.

3.5. Перевод конечной десятичной дроби в *P*-ичную

Если у дроби есть ненулевая целая часть, то она переводится из десятичной системы в P-ичную отдельно, см. параграф 3.4. Сформулируем правила перевода дробной части.

Дана правильная конечная десятичная дробь b. Допустим, что в P-ичной системе наша дробь b имеет вид $b = 0{,}b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-k}\ldots$ (в P-ичной системе дробь может оказаться и бесконечной). Необходимо найти цифры b_{-1}, b_{-2}, $\ldots b_{-k}$, $\ldots$. Приравняем исходную десятичную дробь b к ее развернутой форме (1.8) в P-ичной системе счисления

$$b = b_{-1}P^{-1} + b_{-2}P^{-2} + \ldots + b_{-k}P^{-k} + \ldots . \quad (3.4)$$

Умножим левую (само число) и правую части выражения (3.4) на Р. В правой части получим

$$b_{-1} + b_{-2}P^{-1} + \ldots + b_{-k}P^{-k+1} \ldots, \quad (3.5)$$

значит первая цифра дробной части числа b в P-ичной системе b_{-1} равна целой части результата умножения десятичной дроби b на P ($0 \leq b_{-1} < P$, справедливость этих неравенств следует из того, что $0 \leq b < 1$ и $0 \leq b \cdot P < P$).

Дробную часть результата умножения обозначим через b, то есть $b = b_{-2}P^{-1} + \ldots + b_{-k}P^{-k+1}\ldots$, и опять умножим полученное равенство на P. В результате справа получим $b_{-2} + b_{-3}P^{-1} + \ldots + b_{-k}P^{-k+2}\ldots$, и целая часть результата в левой части равна b_{-2} — второй искомой цифре.

Этот процесс необходимо продолжать до тех пор, пока дробная часть результата умножения левой части не будет равна нулю или не будет выделен период из повторяющихся цифр. Иногда процесс можно прервать раньше, если уже достигнута необходимая точность вычислений.

Почему возникает вопрос о точности вычислений? Нетрудно привести пример, когда описанный процесс перевода может продолжаться бесконечно долго, например, при переводе десятичной дроби 0,1 в двоичную систему счисления. Этот процесс требуется когда-то прервать. А прерывают его либо тогда, когда мы можем записать эту дробь с указанием непериодической части и периода, либо когда уже получено необходимое количество значащих цифр и можно считать, что достигнута необходимая точность представления числа (именно так поступают при представлении двоичных дробей в компьютере, подробнее об этом можно прочитать в главе 7).

Можно показать, что при переводе конечной и даже периодической десятичной дроби в P-ичную систему всегда получится либо конечная, либо периодическая P-ичная дробь. Дело в том, что любой периодической дроби соответствует обыкновенная дробь, то есть некоторое рациональное число. Переведя числитель и знаменатель этой дроби в P-ичную систему и организовав деление столбиком числителя на знаменатель, мы получим P-ичную дробь. Так как количество различных остатков при делении на любой натуральный знаменатель конечно, то если процесс деления бесконечен, то остатки обязательно начнут повторяться, образуя период.

Сформулируем описанные выше правила перевода десятичных дробей в P-ичную систему в виде алгоритма.

Алгоритм перевода правильной конечной десятичной дроби в *P*-ичную систему счисления:

1) *умножим исходное число на P (основание новой системы счисления), целая часть полученного произведения является первой цифрой после запятой в искомом числе (целая часть может быть как равна нулю, так и быть больше девяти, но она всегда меньше чем P, это позволяет записать ее в виде ровно одной цифры P-ичной системы счисления);*
2) *дробную часть произведения снова умножим на P, целую часть полученного числа заменяем на цифру в P-ичной системе и приписываем ее справа к результату;*
3) *выполняем пункт (2) до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю, или не выделится период (дробная часть окажется равной уже получавшейся ранее дробной части произведения).*

Пример 3.18. Переведем число 0,375 в двоичную систему счисления.

$0{,}375 \cdot 2 = 0{,}75$	0 — первая цифра результата
$0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5$	1 — вторая цифра результата
$0{,}5 \cdot 2 = 1{,}0$	1 — последняя цифра результата

Ответ: $0{,}375 = 0{,}011_2$.

Пример 3.19. Переведем число 0,515625 в четверичную систему счисления.

$0{,}515625 \cdot 4 = 2{,}0625$	2 — первая цифра результата
$0{,}0625 \cdot 4 = 0{,}25$	0 — вторая цифра результата
$0{,}25 \cdot 4 = 1{,}0$	1 — последняя цифра результата

Ответ: $0{,}515625 = 0{,}201_4$.

Пример 3.20. Переведем число 0,109375 в шестнадцатеричную систему

$0{,}109375 \cdot 16 = 1{,}75$	1 — первая цифра результата
$0{,}75 \cdot 16 = 12{,}0$	$C_{16} = 12$ является последней цифрой искомой дроби

Ответ: $0{,}109375 = 0{,}1C_{16}$.

Пример 3.21. Переведем в пятеричную систему счисления число 0,123.

$0{,}123 \cdot 5 = 0{,}615$	0
$0{,}615 \cdot 5 = 3{,}075$	3
$0{,}075 \cdot 5 = 0{,}375$	0
$0{,}375 \cdot 5 = 1{,}875$	1
$0{,}875 \cdot 5 = 4{,}375$	4

Дробная часть последнего произведения равна уже встречавшейся ранее дробной части, следовательно, последние две цифры образуют период пятеричной дроби.

Ответ: $0{,}123 = 0{,}030(14)_5$.

Пример 3.22. (*Московский государственный университет экономики, статистики и информатики,* 1996 *г.*)

Десятичное число 20,45 перевели в четвертичную систему счисления. Найти 1999-ую цифру после запятой.

Поскольку надо найти 1999-ую цифру после запятой, достаточно перевести в четвертичную систему счисления дробную часть, то есть число 0,45. Имеем:

$0,45 \cdot 4 = 1,8$
$0,8 \cdot 4 = 3,2$
$0,2 \cdot 4 = 0,8$
$0,8 \cdot 4 = 3,2$

(дробная часть совпала с уже встречавшейся ранее).

Получили бесконечную дробь с периодом (30) и непериодической частью, равной 1.

Таким образом $0,45 = 0,1(30)_4$.

Найдем теперь 1999-ую цифру этого числа. Первая цифра после запятой — единица; остаются еще 1998 цифр, находящихся в периодической части. Число 1998 четное, т.е. последовательность из двух цифр (30) повторится целое число раз. Поэтому 1999-ой цифрой будет 0.

Ответ: 1999-ая цифра — ноль.

3.6. Перевод бесконечной периодической десятичной дроби в *P*-ичную

Дана бесконечная периодическая десятичная дробь. Требуется перевести ее в *P*-ичную систему счисления.

Для решения задачи воспользуемся алгоритмом, приведенным в параграфе 3.5. Но для получения правильного результата сначала необходимо научиться правильно умножать период дроби на произвольное число.

Правило умножения периода правильной дроби на произвольное число:

1) *если при умножении периода дроби на некоторое число количество цифр в произведении равно количеству цифр в периоде исходного числа, то период результата равен полученному произведению, переходим к* (6), *в противном случае к* (2);
2) *«лишними» цифрами будем считать n–k первых слева цифр результата, где n — количество цифр в результате, k — количество цифр в периоде исходной дроби;*
3) *сложим число, образованное «лишними» цифрами, с числом, образованным правыми k цифрами промежуточного результата;*
4) *если количество цифр в получившемся результате сложения больше, чем k, то процесс следует повторить с* (2);
5) *если количество цифр результата сложения стало равным количеству цифр периода исходной дроби, то период произведения равен последнему результату суммирования;*
6) *непериодическая* (*целая — для чисто периодических дробей*) *часть результата равна сумме чисел, образованных из «лишних» цифр каждого этапа.*

Если же у исходной дроби изначально была своя непериодическая часть, то умножить также следует и ее, а затем сложить с результатом умножения периода.

Пример 3.23. Выполним умножение $0,(09) \cdot 8$.

Так как в периоде исходной дроби две цифры, и в произведении периода (09) на 8 также две цифры, то период результата равен получившемуся произведению.

Ответ: $0,(09) \cdot 8 = 0,(72)$.

Пример 3.24. Выполним умножение $0,(7) \cdot 16$.

Умножим период дроби на 16: $7 \cdot 16 = 112$. В периоде дроби одна цифра, а в произведении — три цифры. Следовательно «лишними» являются две левые цифры, образующие число 11. Прибавив 11 к 2, получим 13, что опять превышает исходную длину периода на одну цифру. Вновь сложим «лишнее» число 1 с правой цифрой результата, $1 + 3 = 4$. Количество цифр результата равно количеству цифр в периоде исходной дроби, следовательно, период произведения равен 4. Целая же часть результата умножения равна $11 + 1 = 12$ (в процессе ее формирования участвуют только «лишние» цифры).

Ответ: $0,(7) \cdot 16 = 12,(4)$.

Пример 3.25. Выполним умножение $0,7(6) \cdot 12$.

Сначала умножим на 12 периодическую часть. $6 \cdot 12 = 72$. В получившемся произведении две цифры, а в исходном периоде — одна. Следовательно, «лишнее» число равно 7, результат сложения равен $2 + 7 = 9$. В получившемся числе количество цифр равно количеству цифр в периоде исходной дроби, т.е. период произведения равен 9. Непериодическая часть произведения равна единственному «лишнему» числу — 7. Таким образом, $0{,}0(6)\cdot 12 = 0{,}7(9) = 0{,}8$ (здесь использована эквивалентность двух форм записи конечных дробей).

Затем умножим на 12 непериодическую часть исходной дроби $0{,}7\cdot 12 = 8{,}4$.

Ответ: $0{,}7(6)\cdot 12 = 8{,}4 + 0{,}8 = 9{,}2$.

Теперь перевод в P-ичную систему даже периодических дробей можно осуществлять по правилам параграфа 3.5.

Рассмотрим примеры перевода периодических дробей из десятичной системы счисления в P-ичную систему.

Пример 3.26. Десятичную дробь 0,7(6) переведем в двенадцатеричную систему счисления.

$0{,}7(6)\cdot 12 = 9{,}2$	(первая цифра результата — 9);
$0{,}2 \cdot 12 = 2{,}4$	(вторая цифра результата — 2);
$0{,}4 \cdot 12 = 4{,}8$	(третья цифра результата — 4);
$0{,}8 \cdot 12 = 9{,}6$	(четвертая цифра результата — 9);
$0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$	(цифрой 7 заканчивается период результата, который начинается со второй его цифры);
$0{,}2 \cdot 12 = 2{,}4$	(вторая строка совпадает с шестой строкой, т.е. получившаяся дробь является периодической двенадцатеричной дробью).

Ответ: $0{,}7(6)_{10} = 0{,}9(2497)_{12}$.

Пример 3.27. Десятичную дробь 0,(7) переведем в шестнадцатеричную систему.

$0{,}(7)\cdot 16 = 12{,}(4)$	(первая цифра результата — C);
$0{,}(4)\cdot 16 = 7{,}(1)$	(вторая цифра результата — 7);
$0{,}(1)\cdot 16 = 1{,}(7)$	(третья цифра результата — 1, она же является последней цифрой периода).

Ответ: $0{,}(7)_{10} = 0{,}(C71)_{16}$.

Второй способ перевода состоит в том, что любую периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной, затем целочисленные числитель и знаменатель перевести в P-ичную систему, и уже в ней вновь преобразовать обыкновенную дробь в P-ичную, организовав деление столбиком так, как это показано в параграфе 2.3.

Пример 3.28. Десятичную дробь 0,(3) переведем в двоичную систему.

$$0{,}(3) = \frac{1}{3} = \frac{1}{11_2} = 0{,}(01)_2.$$

3.7. Перевод чисел из P-ичной системы в Q-ичную

Обычно сначала число переводят из P-ичной системы в десятичную, используя правила параграфов 3.1-3.3, затем из десятичной системы переводят в Q-ичную систему по правилам параграфов 3.4-3.6. При таком подходе все вычисления можно производить в привычной для нас десятичной системе счисления.

Для того чтобы сделать перевод непосредственно, минуя десятичную систему, необходимо выписать таблицу умножения и сложения в Q-ичной или в P-ичной системе счисления и проделать действия, аналогичные алгоритмам параграфов 3.1-3.3 или 3.4-3.6 соответственно, только производя все вычисления согласно выписанным таблицам в Q-ичной или, соответственно, в P-ичной системе.

Пример 3.29. Переведем в двоичную систему дробь $20{,}1_3$, производя все арифметические действия в двоичной системе счисления:

$$20{,}1_3 = 2\cdot 3 + \frac{1}{3} = 10_2\cdot 11_2 + \frac{1}{11_2} = 110{,}(01)_2.$$

3.8. Вопросы и ответы

1. Переведите в десятичную систему счисления числа, записанные в пятеричной системе счисления:
1_5; 301_5; 121234_5.
Решение.
1) Очевидно, что $1_{10} = 1_5$.
2) $301_5 = 3\cdot 5^2 + 0\cdot 5 + 1 = 76_{10}$.
3) $121234_5 = 1\cdot 5^2 + 2\cdot 5^4 + 1\cdot 5^3 + 2\cdot 5^2 + 3\cdot 5 + 4$. Воспользуемся схемой Горнера для вычисления этого многочлена (см. п.3.1).
$1\cdot 5^5 + 2\cdot 5^4 + 1\cdot 5^3 + 2\cdot 5^2 + 3\cdot 5 + 4 =$
$= ((((1\cdot 5 + 2)\cdot 5 + 1) + 2)\cdot 5 + 3)\cdot 5 + 4 =$
$= (((7\cdot 5 + 1)\cdot 5 + 2)\cdot 5 + 3)\cdot 5 + 4 =$
$= ((36\cdot 5 + 2)\cdot 5 + 3)\cdot 5 + 4 = (182\cdot 5 + 3)\cdot 5 + 4 =$
$= 913\cdot 5 + 4 = 4569$.
Следовательно, $121234_5 = 4569_{10}$.
2. Школьный калькулятор работает в троичной системе счисления и для вывода числа на экране имеет только четыре знакоместа. С каким самым большим десятичным числом, переведенным, конечно, в троичную систему счисления, мы можем работать?

Решение. В троичной системе счисления используются цифры 0, 1, 2. Самое большое число, которое можно высветить на экране калькулятора — 2222. По алгоритму, описанному в п. 3.1, переведем это троичное число в десятичную систему счисления, получим ответ 80.

3. Требуется выбрать 5 различных гирь так, чтобы с их помощью можно было взвесить любой груз до 30 кг включительно при условии, что гири ставятся только на одну чашу весов. (Эта задача приведена в книге знаменитого математика XIII века Леонардо Пизанского. Этой же задачей интересовался Л. Эйлер.)

Решение. Очевидно, что сумма всех гирь должна быть не меньше 30 кг. Но этого, конечно, недостаточно. Чтобы взвесить некоторый груз, помещая гири только на одну чашку весов, надо представить его вес в виде суммы весов имеющихся гирь. При этом каждая гиря должна браться не более одного раза.

Пусть выбранные нами гири имеют вес p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Тогда груз весом $Q \le 30$ кг можно представить таким образом

$$Q = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5,$$

где каждый коэффициент равен 1, если гирю кладем на весы, или 0, если гирей не пользуемся.

При такой постановке вопроса видно сходство с представлением числа Q в двоичной системе счисления. Нужно в качестве веса гирь p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 взять степени двойки, начиная с нулевой: $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 4, p_4 = 8, p_5 = 16$.

Сумма $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 > 30$, а любое натуральное число $Q \le 30$ можно представить по формуле (1.7) в виде

$$Q = a_1 \cdot 2^0 + a_2 \cdot 2^1 + a_3 \cdot 2^2 + a_4 \cdot 2^3 + a_5 \cdot 2^4.$$

Заметим, что получившееся решение задачи не является единственным, например, вместо гири весом в шестнадцать килограмм можно взять пятнадцатикилограммовую гирю.

Покажем теперь, как для любого груза, имеющего вес, не превосходящий 30 кг, подобрать нужные гири. Пусть, например, надо взвесить груз весом 22 кг. Запишем число 22 в двоичной системе счисления $22_{10} = 10110_2$. Следовательно, надо взять гири весом 2 кг, 4 кг, 16 кг, так как в двоичном представлении этого числа единицы стоят на втором, третьем и пятом месте справа. Эти места соответствуют первой, второй и четвертой степеням числа два.

3.9. Контрольные вопросы и упражнения

1. Переведите в десятичную систему счисления числа, записанные в двоичной системе счисления (двоичные числа):

$$1_2;\ 101_2;\ 10000_2;\ 1000101010_2;\ 11001011_2.$$

2. Какое максимальное число можно записать в двоичной системе счисления пятью цифрами?
3. Перевести из двоичной системы в десятичную числа $0{,}0(0011)_2$, $0{,}(001)_2$. Здесь в скобках указан период бесконечной двоичной дроби.
4. Переведите десятичное число 52 в двоичную, восьмеричную и 11-ричную системы счисления.
5. Переведите следующие числа в десятичную систему счисления: 123_4; $123{,}4_5$; $203{,}5_6$; $0{,}(C)_{16}$.
6. Переведите число 1998 в систему счисления с основанием, равным вашему возрасту. Может ли в новой системе счисления получившееся число быть дробным?
7. Переведите следующие десятичные дроби в троичную и восьмеричную системы счисления: 0,1; 0,3; 0,8; 0,(1); 0,(3); 0,(8); 0,13(18).
8. Переведите в восьмеричную систему конечную шестнадцатеричную дробь $BF3{,}6_{16}$.
9. Подсчитайте количество используемых операций (сложения и умножения) при вычислении десятичного значения числа $ABCDA9_{16}$ по развернутой форме записи и по схеме Горнера. Считаем, что операции возведения в степень нет.
10. В задаче о чудаке-математике, восстановите все числа в десятичной системе счисления. «Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня уже была маленькая семья из 10 детей. Жалования я получал в месяц всего 200 рублей, из которых $\frac{1}{10}$ приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 рублей в месяц».

5 Заказ 4092