СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Доктор физико-математических наук
И. ЯГЛОМ

Ключевые числа

Первые девять натуральных чисел мы обозначаем специальными знаками

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

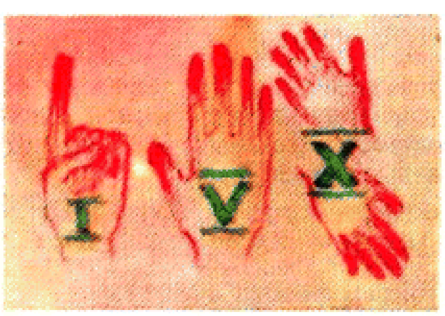
Поступать таким же образом со всеми встречающимися на практике числами было бы неудобно. Даже если бы наши потребности ограничивались счетом в пределах тысячи, надо было бы запомнить тысячу специальных знаков. Естественно, что уже давно люди стали выбирать тот или иной ряд «ключевых» чисел и только их обозначать специальными знаками. Такова, например, римская система счисления (нумерация), основанная на ключевых числах

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

Эти числа в римской системе счисления обозначают буквами

I («и»), V («ве»), X («икс»), L («эль»), C («це»), D («де»), и M («эм»).

Такие обозначения частично произошли от рисунков, изображавших



некогда соответствующие числительные (I — палец, V — пятерня с расставленными пальцами, X — две пятерни), а частично являются сокращениями латинских слов (centum — сто, demimille — пятьсот, mille — тысяча).

Так как римская система нумерации нужна нам только для примера, мы рассмотрим ее в более древнем, упрощенном варианте, когда число «четыре» писалось в виде IIII, а не в виде IV. Число 3477 в этой староримской системе записывается так:

$$\text{MMMCCCCLXXVII}=3\cdot 1000+4\cdot 100+50+2\cdot 10+5+2.$$

Аналогично поступает кассир, имеющий денежные купюры достоинством в 100 рублей, 50 рублей, 25 рублей, 10 рублей, 5 рублей, 3 рубля и 1 рубль. Для кассира ключевыми являются числа

100, 50, 25, 10, 5, 3 и 1.

Желая выплатить, скажем, 499 рублей, он выдает сначала столько сотенных бумажек, сколько возможно, чтобы не выдать лишнего:

$$499=4\cdot 100+99$$

Затем он выдает столько купюр по 50 рублей, сколько возможно, чтобы выдать не более оставшихся к выплате 99 рублей:

$$499=4\cdot 100+1\cdot 50+49,$$

и т. д. Иногда у него может получиться остаток меньше, чем следующее ключевое число. Так будет в нашем примере после выдачи двух десятирублевок:

$$499=4\cdot 100+1\cdot 50+1\cdot 25+2\cdot 10+4.$$

Следующее ключевое число равно 5, однако так как $4<5$, то пятирублевок выдавать не придется. Но для полноты картины можно считать, что было выдано 0 пятирублевок, и вклю-

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 6 за 1970 год.

чить в сумму слагаемое $0\cdot 5$. Вся процедура выдачи 499 рублей запишется так:

$$499=4\cdot 100+1\cdot 50+1\cdot 25+\\+2\cdot 10+0\cdot 5+1\cdot 3+1\cdot 1.$$

Попробуем теперь обобщить сказанное, взяв в качестве последовательности ключевых чисел («базиса») любую последовательность возрастающих натуральных чисел:

$$q_0=1<q_1<q_2<\ldots<q_n<\ldots \qquad (1)$$

Опишем, как получить запись произвольного числа N *в системе счисления с базисом (1).*

В последовательности (1) ключевых чисел находим самое большое число q_n, не превосходящее N. Делим N на q_n и получаем (неполное) частное a_n и остаток r_{n-1}:

$$N=a_nq_n+r_{n-1}, \text{ где } 0\leqslant r_{n-1}<q_n.$$

Первый остаток r_{n-1} делим на следующее ключевое число q_{n-1}. Получаем

$$r_{n-1}=a_{n-1}q_{n-1}+r_{n-2},$$

где

$$0\leqslant r_{n-2}<q_{n-1},$$

или

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+r_{n-2}.$$

(Заметьте, что мы не исключаем здесь и тот случай, когда $r_{n-1}=0$,— в этом случае все последующие частные и остатки будут равны нулю!) Теперь новый остаток r_{n-2} делим на q_{n-2}, мы получаем

$$r_{n-2}=a_{n-2}q_{n-2}+r_{n-3},$$

где

$$0\leqslant r_{n-3}<q_{n-2},$$

или

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+a_{n-2}q_{n-2}+r_{n-3},$$

и т. д.

В конце концов, разделив предпоследний остаток r_1 на q_1, получаем

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\ldots\\ \ldots+a_2q_2+a_1q_1+r_0,$$

где

$$0\leqslant r_0<q_1.$$

(Так как $q_0=1$, то делить на него «последний остаток» r_0 излишне: ясно, что $r_0=a_0q_0=a_0$.)

Практически подобное многократное деление обычно записывают слитно. Как это делается, мы покажем на уже разобранном примере записи суммы в 499 рублей в «системе кассира»:

$$\begin{array}{r|l}
499 & 100 \\ \hline
400 & 4 \\
99 & 50 \\ \hline
50 & 1 \\
49 & 25 \\ \hline
25 & 1 \\
24 & 10 \\ \hline
20 & 2 \\
4 & 5 \\ \hline
0 & 0 \\
4 & 3 \\ \hline
3 & 1 \\
1 & 1 \\ \hline
1 & 1 \\
0 &
\end{array}$$

т. е. $499=4\cdot 100+1\cdot 50+$
$+1\cdot 25+2\cdot 10+0\cdot 5+$
$+1\cdot 3+1\cdot 1.$

(Здесь все частные a_n, a_{n-1} и т. д. набраны красными цифрами, а само число N и остатки r_{n-1}, r_{n-2} и т. д.— синими.)

Позиционные системы счисления

Вероятно, вы уже догадались, что в случае базиса

$$q_0=1,\ q_1=10,\ q_2=10^2,\ \ldots,\ q_n=10^n,\ \ldots$$

мы будем иметь дело с общеупотребительной *десятичной* системой счисления. Но вместе того чтобы писать, скажем,

$$4\cdot 10^5+0\cdot 10^4+3\cdot 10^3+0\cdot 10^2+\\+1\cdot 10+7,$$

мы пишем просто 403017.

Рассеянный или чересчур пунктуальный кассир мог бы приготовить для записи своих выдач ведомость, где число выданных купюр разного достоинства заносилось бы в отдельные столбцы. В такой ведомости выдача 499 рублей выглядела бы так:

	100	50	25	10	5	3	1
499	4	1	1	2	0	1	1

Можно сказать, что в «системе счисления кассира» число 499 записывается в виде

4112011.

Системы счисления, родственные разобранным в последних двух примерах (т. е. десятичной системе счисления и «системе кассира»), называются *позиционными* (о значении этого выражения мы еще скажем ниже). Вместо громоздкой записи

$$N = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \ldots + a_2 q_2 + a_1 q_1 + a_0$$

в позиционной системе счисления с базисом (1) удобно пользоваться более компактной записью из $n+1$ «цифры»:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0.$$

При этом предполагается, что «цифры» a_k получены тем способом (алгоритмом), который был описан выше.

Из этого описания ясно, что в заданном базисе каждое натуральное число N записывается единственным образом. Далее, так как «старшая цифра» a_n получается как частное от деления на q_n числа N, которое по условию меньше q_{n+1} (ибо иначе мы начали бы с деления N на q_{n+1}, а не на q_n!), то $a_n < q_{n+1}/q_n$. Поэтому, если частное q_{n+1}/q_n заключено между целыми числами A и $A-1$:

$$A-1 < \frac{q_{n+1}}{q_n} \leqslant A,$$

«цифра» a_n не превосходит $A-1$, т. е. она может принимать A значений:

$a_n = 0$, или 1, или 2, ..., или $A-1$.

(Впрочем для «старшей» цифры числа значение $a_n = 0$ также можно исключить.)

Аналогично цифра a_{n-1} получается в процессе деления «первого» остатка r_{n-1} на q_{n-1}. Но так как

$$r_{n-1} < q_n,$$

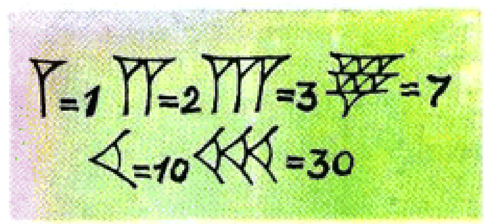
то

$$a_{n-1} < \frac{q_n}{q_{n-1}}.$$

Это рассуждение можно распространить и на все другие цифры. В частности, так как последняя цифра a_0 просто совпадает с «последним» остатком r_0, полученным при делении на q_1, то a_0 может принимать q_1 значений:

$a_0 = 0$, или 1, или 2, ..., или $q_1 - 1$.

До позиционной системы счисления люди дошли не сразу. Одним из затруднений долго было отсутствие числа «нуль» (и специального знака для этого числа). Впервые знак нуля появился в рамках *вавилонской шестидесятеричной* системы счисления. В вавилонских текстах, написанных характерной «клинописью» (см. рисунок), числа от 1 до 59 записывались по *десятичной* системе.

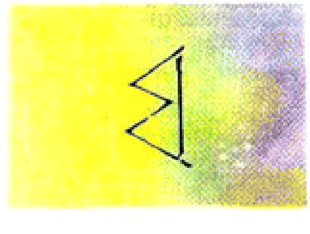


Но основной для вавилонской математики была шестидесятеричная система счисления с базисом

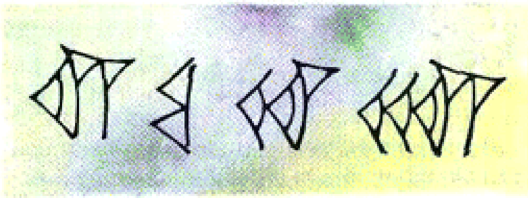
$$1,\ 60,\ 60^2,\ 60^3,\ \ldots,\ 60^n,\ \ldots$$

До мысли иметь специальный знак нуля математики, пользовавшиеся клинописью, дошли довольно поздно (впрочем, заведомо не позднее третьего века до нашей эры).

Знак нуля выглядел так:



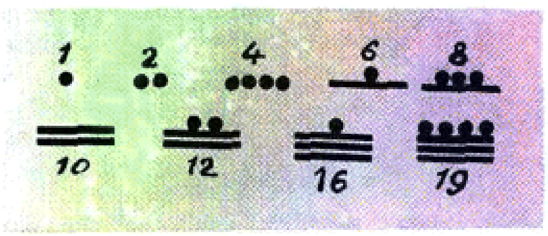
Вы поймете после этих разъяснений, что запись



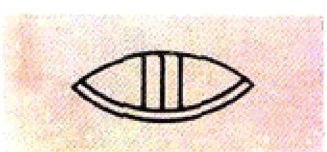
означает число

$$2593292=12\cdot 60^3+0\cdot 60^2+$$
$$+21\cdot 60+32.$$

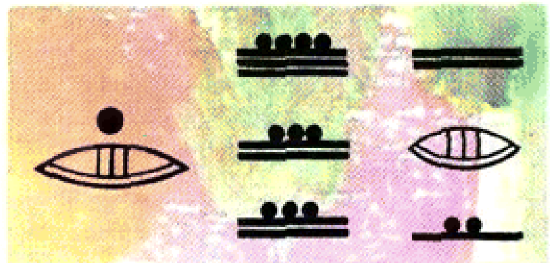
Очень близка к вавилонской система счисления, принятая в древней цивилизации индейцев майя, обитавших на территории Центральной Америки. Создание этой системы счисления относится к началу нашей эры. Если вавилонская система счисления имела комбинированный десятично-шестидесятеричный характер, то система майя была пятерично-двадцатеричной. Первые 19 чисел записывались комбинированием черточки, обозначавшей пятерку, и точки (единицы):



Но основную роль играла искаженная двадцатеричная система счисления. При записи числа «цифры» подписывались одна под другой, причем старшей являлась верхняя цифра. Прилагательное «искаженная» означает вот что: третье — после 1 и 20 — ключевое число в системе майя равнялось не $20\times\times 20=20^2$, а $18\cdot 20=360$; далее шли $18\cdot 20^2$, $18\cdot 20^3$, $18\cdot 20^4$. Существовало и специальное обозначение для нуля, напоминающее полузакрытый глаз:



Вот несколько примеров записи чисел в системе майя:



$(1\cdot 20+0=20,\quad 19\cdot 360+13\cdot 20+$
$+13=7113,\ 10\cdot 360+7=3607).$

Основное отличие записи чисел в вавилонской системе счисления и в системе майя от римской нумерации как раз и заключается в «позиционном» принципе этих систем: в то время как у римлян буква I всегда означает единицу, а V — пятерку, независимо от того, где эти буквы стоят, у древних вавилонян и у индейцев майя значение «цифры» существенно зависит от занимаемого ею места, или «позиции». Именно поэтому такие системы записи чисел (к числу которых принадлежит и общераспространенная «десятичная система», созданная в Индии в VIII—IX вв. или немного раньше) называют *позиционными*.

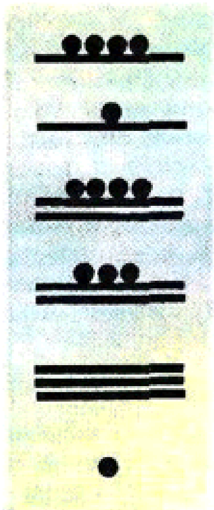
Упражнения

1. Запишите в «полной системе кассира» (где «ключевыми» являются следующие числа: 10 000, 5000, 2500, 1000, 500, 300, 100, 50, 20, 15, 10, 5, 3, 2 и 1, отвечающие выраженным в копейках ценностям всех существующих бумажных денег и всех монет) сумму в 233 руб. 87 коп. Запишите операцию перевода 23 387 коп. в «систему кассира» с помощью «непрерывного деления» (см. с. 16).

2. Прочтите записанное по вавилонской системе число

3. Прочтите записанное по системе майя

число



(Это самое большое число, обнаруженное в памятниках культуры майя.)

Системы счисления с заданным основанием

Так называются системы счисления с базисом

$$q_0=d^0=1,\ q_1=d^1=d,\ q_2=d^2,\ q_3=d^3,\ q_4=d^4,\ldots \qquad (2)$$

где d — любое целое число, большее единицы. Это число называется *основанием* системы счисления.

К числу таких систем принадлежит обычная десятичная система счисления с основанием $d=10$, вавилонская шестидесятеричная $(d=60)$ и получившая широкое применение в последнее время в связи с нуждами вычислительной техники двоичная система счисления $(d=2)$. В случае произвольного основания d говорят о «d-ичной» системе счисления.

В d-ичной системе счисления запись

$$N=«a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0»$$

имеет следующий смысл:

$$N=a_nd^n+a_{n-1}d^{n-1}+\ldots+a_2d^2+a_1d+a_0.$$

Ясно, что каждая цифра в записи числа по d-ичной системе счисления может принимать лишь d значений: 0, или 1, или 2, или 3, ..., или $d-1$. В частности, если $d=10$ и, следовательно, базис системы счисления имеет вид

$$q_0=1,\ q_1=10,\ q_2=100,\ q_3=1000,\ldots$$

мы приходим к общепринятой *десятичной* системе счисления (счет единицами, затем десятками, затем сотнями, тысячами, десятками тысяч и т. д.); в ней все цифры принимают значения, не превосходящие 9.

Самой простой из всех d-ичных систем счисления является, очевидно, *двоичная* система счисления с базисом

$$q_0=1,\ q_1=2,\ q_2=4,\ q_3=8,\ q_4=16,\ldots$$

Эта система счисления знает всего две цифры 0 и 1. Вот запись первых 15 натуральных чисел в этой системе:

$1=1$	$6=110$	$11=1011$
$2=10$	$7=111$	$12=1100$
$3=11$	$8=1000$	$13=1101$
$4=100$	$9=1001$	$14=1110$
$5=101$	$10=1010$	$15=1111.$

При использовании этой системы счисления все расчеты становятся довольно длинными, но чрезвычайно простыми. Если бы мы всегда пользовались именно этой системой счисления, то школьникам пришлось бы запоминать лишь следующую «таблицу умножения»:

$$0\cdot0=0,\ 0\cdot1=1\cdot0=0,\ 1\cdot1=1$$

(и «таблицу сложения», сводящуюся к равенству $1+1=10$,— ведь число «10» — это обычная двойка!). Двоичная система счисления находит многочисленные применения в науке и технике; в частности, она лежит в основе устройства современных электронных счетных машин*).

Упражнения

4. Число $N=123\,456$, записанное в обычной (десятичной) системе счисления, перепишите:

а) в 7-ричной системе счисления;

б) в 12-ричной системе счисления (в этой системе счисления для записи чисел исполь-

*) Двоичной системе счисления и ее применению уделено много места в рассчитанной на учащихся средней школы книжке С. В. Фомина «Система счисления» (М., Наука, 1968), в ряде пунктов соприкасающейся с содержанием настоящей статьи.

зуются 12 цифр, например такие: 0, 1, 2, ..., 9, $x=10$, $y=11$);

в) в двоичной системе счисления.

5. Запишите в десятичной системе счисления числа, записанные в двоичной системе:

$$P=100\,100,\ Q=101\,010\,101.$$

6. Составьте таблицу сложения и таблицу умножения в троичной системе счисления.

Системы счисления с другими базисами

Системы счисления с базисами, не образующими геометрической прогрессии 1, d, d^2, d^3, ..., не имеют столь же широких применений. Но при решении некоторых математических задач они оказываются полезными.

Рассмотрим несколько примеров таких систем счисления.

1° **Система майя.** Выше мы уже говорили о системе счисления майя, базис которой имел вид

$$q_0=1,\ q_1=20,\ q_2=18q_1\,(=18\cdot 20),$$
$$q_3=20q_2\,(=18\cdot 20^2),$$
$$q_4=20q_3\,(=18\cdot 20^3),\dots$$

Эта система счисления во всем подобна двадцатеричной, отличаясь от нее лишь в одном отношении: в ней вторая с конца цифра в записи $N=«a_na_{n-1}\dots a_2a_1a_0»$ произвольного числа (которую мы привычно располагаем горизонтально, а не сверху вниз, как майя)

$$a_1<\frac{q_2}{q_1}=\frac{18\cdot 20}{20}=18,$$

в то время как все другие цифры могут принимать 20 значений: 0, 1, 2, ..., 19.

Аналогично будет обстоять дело в системе счисления с базисом, в котором q_{n+1} делится на q_n без остатка для всех $n=0, 1, 2, \dots$:

$$q_0=1,\ q_1=d_0,\ q_2=d_1q_1\,(=d_1d_0)$$
$$q_3=d_2q_2,\ q_4=d_3q_3,\ \dots, \qquad (3)$$

где $d_0, d_1, d_2, d_3, \dots$ — какие угодно целые положительные числа, большие 1, различные или одинаковые. В такой системе счисления в записи числа

$$N=«a_na_{n-1}\dots a_2a_1a_0»$$

первая с конца цифра a_0 может принимать d_0 значений 0, 1, 2, ..., d_0-1, следующая цифра a_1 может принимать d_1 значений от 0 до d_1-1, цифра a_2 может принимать значения от 0 до d_2-1 и т. д.

При этом в системе счисления с базисом (3), как и в d-ичной системе счисления (в которую наша система обращается в случае $d_0=d_1==d_2=\dots=d$), имеет смысл любая запись

$$N=«a_na_{n-1}\dots a_2a_1a_0»,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — натуральные числа такие, что $a_0<d_0$, $a_1<d_1$, $a_2<d_2$ и т. д. В самом деле, легко проверить, что при обращении числа

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\dots+a_2q_2+a_1q_1+a_0$$

в нашу систему счисления по методу «непрерывного деления» (см. выше с. 16) получаются цифры

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \dots,\ a_1,\ a_0.$$

То, что такое благополучное положение не является общим законом, мы покажем на примере одной очень простой «системы счисления».

2° **«Четная» система счисления.** Примем за базис системы счисления все четные числа (и число $q_0=1$):

$$q_0=1,\ q_1=2,\ q_2=4,\ q_3=6,$$
$$q_4=8,\ q_5=10,\ q_6=12,\ \dots$$

Так как здесь

$$\frac{q_1}{q_0}=q_1=2$$

и

$$\frac{q_{n+1}}{q_n}=\frac{2(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}<2$$

при всех $n>1$, то эта система счисления, подобно двоичной, знает всего две «цифры»: 0 и 1. Условимся обозначать числа, записанные в этой «четной» системе счисления красным цветом. Тогда, очевидно,

$$2=10,\ 3=11,\ 4=100,\ 5=101,$$
$$6=1000,\ 7=1001,\ 8=10000,$$
$$9=10001 \text{ и т. д.}$$

И вообще, все числа изображаются либо единицей с тем или иным количеством нулей в конце (четные числа), либо двумя единицами в начале и в конце числа, разделенными известным числом нулей (нечетные числа).

Таким образом, в «четной» системе счисления запись каждого числа имеет вид

$$«a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»,$$

где каждая из цифр a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 может принимать только одно из двух значений: 0 или 1. Однако подавляющее большинство последовательностей нулей и единиц не выражает никаких чисел в «четной» системе счисления, поскольку в ней единица может стоять лишь на первом месте и — иногда — на последнем месте.

И наконец, еще один пример.

3° **«Система продавца».** Стандартный набор гирь для чашечных весов в магазине обычно включает гири:

10 г, 20 г (2), 50 г, 100 г, 200 г (2), 500 г, 1 кг, 2 кг, (2) и 5 кг.

Продавец пользуется набором гирь, как кассир ассигнациями, имеющимися в кассе. А именно, отвешивая товар, он прежде всего кладет на весы самую тяжелую из не перевешивающих товар гирь, далее он кладет старшую из оставшихся гирь и т. д. Так, например, взвешивая кусок мяса весом в 3 кг 460 г, он использует ряд гирь, показанных на рисунке. Обобщая эту хорошо известную всем торговым служащим и всем хозяйкам систему «представлений чисел (весов) с помощью заданной системы гирь», мы приходим к системе счисления с базисом

$$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 20,\ 50,\ 100,\ 200,\ 500,$$

в которой 3 кг 460 г запишется так 11020101000.

В этой системе счисления в записи

$$N = «a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»$$

последняя цифра a_0 может равняться лишь 0 или 1 (ибо $q_1 = 2$); предпоследняя цифра a_1 может принимать значения 0, 1 или 2 (так как $2 < q_2/q_1 < 3$), третья от конца цифра a_2 снова может принимать лишь значения 0 и 1 (ибо $q_3/q_2 = 2$); цифра a_3 также может принимать лишь значения 0 и 1, а вот цифра a_4 снова может принимать значения 0, 1 и 2 (ибо $2 < q_5/q_4 < 3$). И вообще, в этой системе счисления все цифры

$$a_1,\ a_4,\ a_7,\ a_{10},\ \ldots,\ a_{3k+1}$$

могут принимать значения 0, 1 и 2, а все остальные цифры — лишь значение 0 и 1. (Поэтому продавцу в магазине достаточно иметь две двухкилограммовые гири и только по одной гире в 1 кг и в 5 кг.)

Упражнения

7. Запишите числа X, Y и Z в десятичной системе, если

а) в «четной» системе счисления $X = 1\,000\,000\,001$;

б) в «системе продавца» $Y = 121\,121$;

в) в «системе продавца» $Z = 20\,120$.

8. Опишите всевозможные последовательности цифр

$$a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_2,\ a_1,\ a_0,$$

которые могут быть прочитаны как запись некоторого числа в «системе продавца».

9. В некоторой системе счисления с базисом (1) два числа записываются так: $N = 10\,211\,004$, $M = 10\,210\,437$. Можно ли по этим данным узнать, какое число больше?

10. Система гирь, о которой говорили в конце статьи, удобнее при взвешивании на чашечных весах, чем десятичная система, но не является самой экономной в смысле количества гирь. Чтобы убедиться в этом, решите следующие задачи:

а) Какое наименьшее число гирь необходимо, чтобы отвесить любое целое число килограммов от 1 до 30 на чашечных весах, если гири можно класть только на одну чашку весов? (Вы можете подбирать такие веса гирь, какие хотите.)

б) Тот же вопрос, если разрешается класть гири на обе чашки весов.

в) Какое наименьшее число гирь необходимо в том и другом случае, чтобы взвесить любой груз (в целое число граммов) от 1 г до 1000 г?

11. Докажите, что в троичной системе счисления (т. е. в системе с базисом (2), где $q=3$) любое число N можно представить в виде $N=A-B$, где A, B и $A+B$ записываются только нулями и единицами, причем такое представление для каждого числа единственно. Например:

$$2=10-1,\ 21=101-10,\ 1001=1001-0$$

(все числа записаны в троичной системе).

12. Докажите, что условие «q_{n+1} делится на q_n при всех $n=0, 1, 2, 3, \ldots$» является необходимым для того, чтобы в системе счисления с базисом (1) имела смысл любая запись

$$N=«a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0»,$$

где

$$a_0 < \frac{q_1}{q_0},\ a_1 < \frac{q_2}{q_1},\ a_2 < \frac{q_3}{q_2} \text{ и т. д.}$$

13. Каким условиям должны удовлетворять числа базисной последовательности q_1, q_2, q_3, ..., чтобы в записи чисел встречались только две цифры 0 и 1? Какое еще условие на эти числа q_1, q_2, q_3, ... нужно наложить, чтобы при этом никакие две единицы не шли подряд?

14. Последовательность чисел

$$q_0=1,\ q_1=2,\ q_2=3,$$
$$q_3=5,\ q_4=8,\ q_5=13,\ \ldots,$$

где

$$q_{n+1}=q_n+q_{n-1},$$

называется последовательностью Фибоначчи. Докажите, что «Фибоначчиева» система счисления удовлетворяет всем условиям предыдущей задачи. Найдите в этой системе сумму чисел:

а) $\underbrace{100\ldots00}_{k}+\underbrace{100\ldots00}_{l}$;

б) $\underbrace{10101\ldots01}_{2m+1}+1$;

б) $\underbrace{10101\ldots01}_{2m+1}+\underbrace{100\ldots00}_{2m+1}$.

15. Можно ли разбить все натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... на две такие возрастающие последовательности a_1, a_2, a_3, ... и b_1, b_2, b_3, ..., что $b_k-a_k=k$ для любого $k=1, 2, 3, \ldots$?

После некоторых размышлений вы, конечно, догадаетесь, как выбрать такие последовательности (это можно сделать единственным образом)

a_1	b_1	a_2	a_3	b_2	a_4	b_3	a_5	a_6	b_4	a_7	a_8	b_5	a_9	b_6	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

Но уловить закономерность в образовании пар (a_k, b_k) не так-то просто. Как узнать, например, к какой из двух последовательностей — a_k или b_k — относится 100, какому номеру оно соответствует, какое число будет с ним в паре (не выписывая все предыдущие a_k и b_k)?

Оказывается, чтобы сформулировать эту закономерность, нужно записать эти последовательности не в десятичной, а в фибоначчиевой системе счисления. Попробуйте ее обнаружить и доказать.

Нам пишут

Дружба — 91

В Польше, в городе Легница, с 10 по 15 июня 1991 года проходил Международный математический турнир школьников «Дружба — 91». В нем участвовали команды из нескольких городов Польши, а также команды из г. Стара Загора (Болгария), г. Алма-Ата (Казахстан) и г. Ереван (Армения).

Соревнования турнира проходили в два дня. Учащимся 9—10 классов предлагалось по 3 задачи в день, школьники 5—8 классов в первый день соревновались в личном первенстве, а во второй — в командном.

Победители соревнований были награждены дипломами, призами и медалями. Одну из золотых медалей получил Арзик Петросян из Еревана. Командное первенство выиграли школьники из г. Стара Загора. Соревнования прошли очень интересно. Для их участников были организованы увлекательные экскурсии по городам Польши.

Вот некоторые из задач, предлагавшихся на соревнованиях.

1. Решите в целых числах уравнения:

а) $\dfrac{m^2+n^2}{3}=1991$,

б) $\dfrac{m^2+n^2+1}{3}=1991$.

2. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Покажите, что если точка M — середина отрезка AB, а точка T — произвольная точка внутри отрезка BC, то окружности, вписанные в треугольники ATC, ATM и MTB, касаются одной прямой.

3. Докажите неравенство для любых действительных чисел a и b:

$$(a+b)^4 \leqslant 8(a^4+b^4).$$

Азамат Сарсембаев и Алмас Рымов, ученики 11 класса РФМШ, г. Алма-Ата