Сколько человек не знают иностранных языков!

Метод, которым мы решили последнюю из задач о шашках, часто применяется для решения комбинаторных задач. Рассмотрим следующий пример:

В научно-исследовательском институте работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий язык и 23 — оба языка. Сколько человек в институте не знают ни английского, ни немецкого языков?

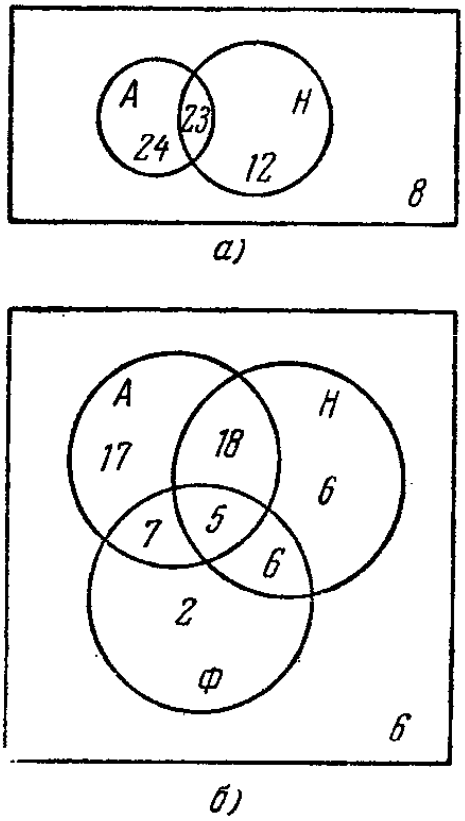

Рис. 5.

Для решения этой задачи надо разбить весь коллектив сотрудников института на части, не имеющие общих элементов. Первую из них составят те, кто знает только английский язык, — вторую — те, кто знает только немецкий язык, третью — те, кто знает оба языка, и четвертую — те, кто не знает ни одного, ни другого языка (рис. 5). Нам дано, что третья часть состоит из 23 человек. Но так как английский язык знают 47 человек, то только английским языком владеют $47-23=24$ человека. Точно так же только немецким языком владеют $35-23=12$ человек. Отсюда следует, что общее число людей, владеющих одним из этих языков, равно $23+24+12=59$ человек. А так как всего в институте работают 67 человек, то на долю последней части приходится $67-59=8$ человек. Итак, 8 человек не знают ни английского, ни немецкого языка.

Полученный ответ можно записать в виде

$$8 = 67 - (23 + 24 + 12).$$

Но 24 мы получили, вычитая 23 из 47, а 12 — вычитая 23 из 35. Поэтому

$$8 = 67 - 23 - (47 - 23) - (35 - 23) = 67 - 47 - 35 + 23.$$

Теперь видна закономерность — из общего числа сотрудников вычитается число знающих английских язык и число знающих немецкий язык. При этом некоторые сотрудники попадают в оба списка и оказываются «вычтенными» дважды. Это как раз те полиглоты, которые знают оба языка. Прибавляя их число, мы получаем число лиц, не знающих ни одного из этих языков.

Усложним разобранную задачу, добавив еще один язык. Пусть французский язык знают 20 человек, английский и французский — 12 человек, немецкий и французский — 11 человек, а все три языка — 5 человек. Ясно, что тогда только английский и французский (без немецкого) знают $12-6=6$ человек, а только немецкий и французский знают $11-5=6$ человек. Значит, только один французский язык знают $20-7-6-5=2$ человека. Эти люди входят в состав тех 8 человек, которым неведомы английский и немецкий языки. Значит, число людей, не знающих ни одного из трех языков, равно $8-2=6$.

Полученный ответ можно записать так:

$$6=8-2=67-47-37+23-(20-7-6-5)=$$
$$=67-47-37+23-20+(12-5)+(11-5)+5=$$
$$=67-47-37-20+23+12+11-5.$$

А теперь закон совершенно ясен. Сначала из общего числа сотрудников вычитают число тех, кто знает один из языков (и, может быть, другие). При этом некоторые оказываются «вычтенными» дважды, поскольку знают два языка. Поэтому прибавляют числа 23, 12, 11, показывающие, сколько человек владеют двумя языками (и, может быть, еще третьим). Но лица, владеющие тремя языками, оказываются сначала трижды «вычтенными», а потом трижды «прибавленными». Так как их надо все-таки вычесть, то приходится еще отнять число 5.

Формула включений и исключений

Разобранные примеры позволяют сформулировать общий закон. Пусть имеется N предметов, некоторые из которых обладают свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. При этом каждый предмет может либо не обладать ни одним из этих свойств, либо обладать одним или несколькими свойствами. Обозначим через $N(\alpha_i\alpha_j\ldots\alpha_k)$

количество предметов, обладающих свойствами $\alpha_i, \alpha_j, \ldots$ $\ldots, \alpha_k$ (и, быть может, еще некоторыми из других свойств). Если нам надо будет подчеркнуть, что берутся лишь предметы, не обладающие некоторым свойством, то это свойство пишем со штрихом. Например, через $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4')$ обозначено количество предметов, обладающих свойствами α_1 и α_2, но не обладающих свойством α_4 (вопрос об остальных свойствах остается открытым).

Число предметов, не обладающих ни одним из указанных свойств, обозначается по этому правилу через $N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_n')$. Общий закон состоит в том, что

$$N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_n') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \ldots - N(\alpha_n) + \\ + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + \ldots + N(\alpha_1\alpha_n) + \ldots + N(\alpha_{n-1}\alpha_n) - \\ - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \ldots - N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) + \ldots \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n). \quad (2)$$

Здесь алгебраическая сумма распространена на все комбинации свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (без учета их порядка), причем знак $+$ ставится, если число учитываемых свойств четно, и знак $-$, если это число нечетно. Например, $N(\alpha_1\alpha_3\alpha_6\alpha_8)$ входит со знаком $+$, а $N(\alpha_3\alpha_4\alpha_{10})$ со знаком $-$. Формулу (2) называют *формулой включений и исключений* — сначала исключаются все предметы, обладающие хотя бы одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, потом включаются предметы, обладающие по крайней мере двумя из этих свойств, исключаются имеющие по крайней мере три и т. д.

Докажем формулу (2). Доказательство ведется с помощью индукции по числу свойств. При одном свойстве формула очевидна. Каждый предмет либо обладает этим свойством, либо не обладает им. Поэтому

$$N(\alpha') = N - N(\alpha).$$

Предположим теперь, что формула (2) доказана для случая, когда число свойств равно $n-1$:

$$N(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}') = N - N(\alpha_1) - \ldots - N(\alpha_{n-1}) + \\ + N(\alpha_1\alpha_2) + \ldots + N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}) - \\ - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \ldots - N(\alpha_{n-3}\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}). \quad (3)$$

Эта формула, по предположению, справедлива для любой совокупности. В частности, она верна для совокупности $N(\alpha_n)$ элементов, обладающих свойством α_n. Для этой совокупности формула (3) принимает вид

$$N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n\right) = N\left(\alpha_n\right) - N\left(\alpha_1\alpha_n\right) - \ldots - N\left(\alpha_{n-1}\alpha_n\right) + \\ + N(\alpha_1\alpha_2\alpha_n) + \ldots + N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_n) - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n) \qquad (4)$$

(добавляется указание, что в каждом случае берутся лишь предметы, обладающие свойством α_n).

Вычтем равенство (4) из равенства (3). В правой части получим то, что нам нужно — правую часть формулы (2). А в левой части получим разность

$$N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\right) - N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n\right). \qquad (5)$$

Но $N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\right)$ — это число предметов, не обладающих свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ и, быть может, обладающих свойством α_n. А $N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n\right)$ — это число предметов, которые не обладают свойствами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, но наверняка обладают свойством α_n. Значит, разность (5) как раз равна числу предметов, не обладающих ни одним из свойств $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Иными словами,

$$N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\right) - N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n\right) = N\left(\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{n-1}'\alpha_n'\right).$$

Таким образом, после вычитания и в левой части получается левая часть формулы (2). Тем самым эта формула доказана для случая, когда число свойств равно n.

Итак, соотношение (2) справедливо для n свойств, коль скоро оно справедливо для $n-1$, а при $n=1$ оно уже доказано; поэтому доказана справедливость этого соотношения для любого набора свойств.

Формулу (2) можно представить в символической форме следующим образом:

$$N(\alpha'\beta' \ldots \omega') = N(1-\alpha)(1-\beta) \ldots (1-\omega). \qquad (6)$$

Здесь после раскрытия скобок надо произведения $N\alpha\beta \ldots \lambda$ писать в виде $N(\alpha\beta \ldots \lambda)$. Например, вместо $N\alpha\beta\delta\omega$ пишем $N(\alpha\beta\delta\omega)$.

В чем ошибка?

Староста одного класса дал следующие сведения об учениках: «В классе учатся 45 школьников, в том числе 25 мальчиков. 30 школьников учатся на хорошо и отлично, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 школьников, учащихся на хорошо и отлично. 15 мальчиков учатся на хорошо и отлично и в то же время занимаются спортом».

Через несколько дней его вызвал к себе классный руководитель (который, как на зло, вел математику) и сказал, что в сведениях есть ошибка. Попробуем выяснить, как он это узнал. Для этого подсчитаем, сколько девочек не занимаются спортом и получают время от времени тройки (а быть может, и двойки). Обозначим через α_1 принадлежность к мужскому полу, через α_2 — хорошую успеваемость и через α_3 — увлечение спортом. Найдем, чему равно $N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3')$. По условию задачи имеем

$$N(\alpha_1)=25,\quad N(\alpha_2)=30,\quad N(\alpha_3)=28,\quad N(\alpha_1\alpha_2)=16,$$
$$N(\alpha_1\alpha_3)=18,\quad N(\alpha_2\alpha_3)=17,\quad N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=15.$$

Значит, по формуле включений и исключений получаем, что

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3')=45-25-30-28+16+18+17-15=-2.$$

Но отрицательным ответ быть не может! Поэтому в данных сведениях есть внутреннее противоречие, они неверны.

Решето Эратосфена

Одной из самых больших загадок математики является расположение простых чисел в ряду всех натуральных чисел. Иногда два простых числа идут через одно число (например, 17 и 19, 29 и 31), а иногда подряд идет миллион составных чисел. Сейчас ученые знают уже довольно много о том, сколько простых чисел содержится среди N первых натуральных чисел. В этих подсчетах весьма полезным оказался метод, восходящий еще к древнегреческому ученому Эратосфену (он жил в III веке до новой эры в Александрии).

Эратосфен занимался самыми различными вопросами — ему принадлежат интересные исследования в области математики, астрономии и других наук. Впрочем, такая разносторонность привела его к некоторой поверхностности. Современники несколько иронически называли Эратосфена «во всем второй» (второй математик после Евклида, второй астроном после Гиппарха и т. д.).

В математике Эратосфена интересовал как раз вопрос о том, как найти все простые числа среди нату-