

Старая, старая сказка...

Решение.

Нетрудно заметить, что задача сводится к многократному решению вот такой вспомогательной задачи: *имеется ряд чисел от 1 до N, причём некоторые из них вычеркнуты; требуется определить K-ое по порядку невычеркнутое число.*

В самом деле, допустим мы только что вычеркнули P-ое по порядку невычеркнутое (до этого момента) число, и у нас осталось в результате Q невычеркнутых чисел. Отсчитать M невычеркнутых чисел означает просто увеличить P на (M-1) (почему именно на M-1, а не на M? – да потому, что теперь P-ым невычеркнутым числом является уже следующее невычеркнутое число). Точнее говоря, с учётом движения по кругу, теперь надо вычёркивать число, стоящее на $((P + (M-1)) \bmod Q)$ -ом месте. Ещё точнее, если $((P + (M-1)) \bmod Q) = 0$, то надо вычёркивать Q-ое невычеркнутое число, но это последнее уточнение.

Осталось решить вспомогательную задачу, причём эффективно ☺.

А для этого прекрасно подойдёт то же самое бинарное дерево, которое появилось у нас в предыдущей задаче. Кратко напомним, о чём идёт речь (хотя настоятельно советую прочитать, если вы этого ещё не делали, решение предыдущей задачи – задачи про Кота).

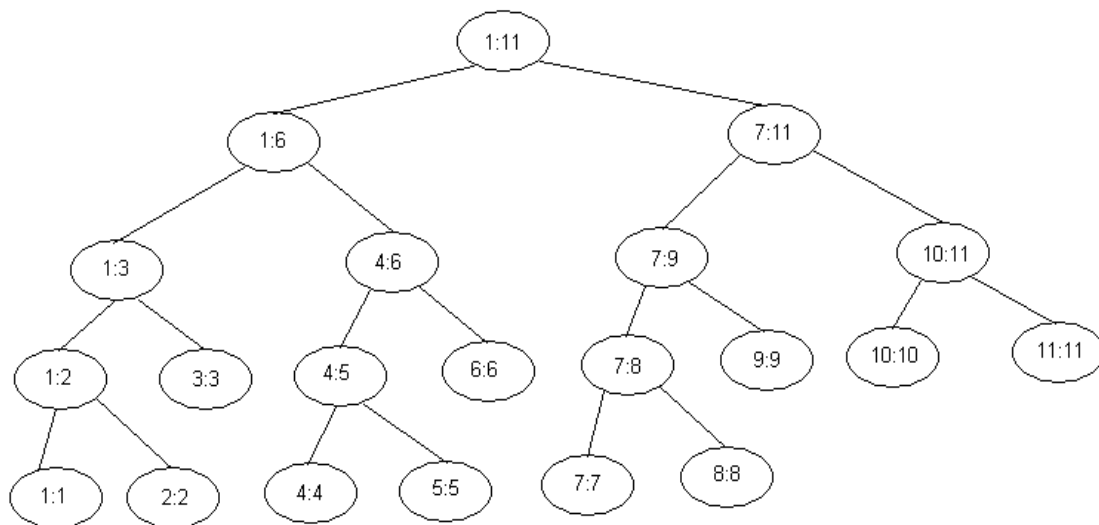
Заведём бинарное дерево, в котором каждый узел v отвечает за некоторый отрезок ряда чисел – всех чисел - и невычеркнутых, и вычеркнутых: отрезок от L(v) до R(v).

Корень дерева root отвечает за весь отрезок: L(root)=1, R(root)=N.

Если L(v)<R(v) – вершина отвечает за отрезок из 2-х или более чисел, - то к вершине v пристраиваем два поддерева: левое, отвечающее за отрезок ряда от L(v) до $((L(v)+R(v)) \div 2)$, и правое, отвечающее за отрезок ряда от $((L(v)+R(v)) \div 2 + 1)$ до R(v).

Если же L(v)=R(v) – вершина отвечает за единственное число.

На рисунке приведён пример такого дерева для N=11 (рисунок, конечно же, взят из решения задачи про Кота ☺).



<Далее следует цитата из решения задачи про Кота>

Отметим, что это дерево зависит только от N и ни от чего больше. В процессе решения задачи само дерево не изменяется, в этом смысле построенное дерево - это статическая структура. Будем изменять только некую дополнительную информацию, хранящуюся в вершинах дерева.

Перечислю несколько ценных свойств такого дерева:

1. Каждая нелистовая вершина имеет ровно двух потомков.
2. Дерево имеет ровно N листьев. Из этих двух очевидных утверждений сразу следует, что
3. дерево имеет ровно 2N-1 вершин.

4. Если две вершины расположены на одном уровне (на одинаковом расстоянии от корня), то длины отрезков, за которые отвечают эти вершины отличаются не более, чем на 1
5. Отсюда сразу следует, что все листья располагаются максимум на двух уровнях, и высота дерева (максимальное расстояние от корня до листа) не превосходит $\lceil \log_2 N \rceil$.
6. Любой отрезок может быть представлен в виде объединения не более, чем $2^{\lceil \log_2 N \rceil}$ попарно непересекающихся отрезков, каждый из которых соответствует некоторой вершине дерева.

<Конец цитаты>

Для решения нашей *вспомогательной задачи* будем в каждой вершине v построенного дерева хранить дополнительно ещё величину amount - количество невычеркнутых чисел на отрезке от $L(v)$ до $R(v)$. Понятно, что в начале $\text{amount}(v) = R(v) - L(v) + 1$ – вычеркнутых чисел пока ещё нет.

Пусть задана некоторая (нелистовая) вершина v и натуральное число K , не превосходящее $\text{amount}(v)$. Найдём K -ое невычеркнутое число на отрезке от $L(v)$ до $R(v)$.

Пусть lson – это левый потомок вершины v . Если $K \leq \text{amount}(\text{lson})$, то K -ое невычеркнутое число на отрезке от $L(v)$ до $R(v)$ одновременно является K -ым невычеркнутым числом на отрезке от $L(\text{lson})$ до $R(\text{lson})$; если же $K > \text{amount}(\text{lson})$, то K -ое невычеркнутое число на отрезке от $L(v)$ до $R(v)$ является $(K - \text{amount}(\text{lson}))$ -ым невычеркнутым числом на отрезке от $L(\text{rson})$ до $R(\text{rson})$, где rson – правый сын вершины v . При любых обстоятельствах искомое число находится на отрезке от $L(v)$ до $R(v)$, мы его найдём и вычеркнем, т.е. необходимо ещё уменьшить $\text{amount}(v)$ на 1.

А если v – лист? Понятно, что если мы зашли в вершину v , то $\text{amount}(v) > 0$, т.е. $\text{amount}(v) = 1$ – ведь лист отвечает за отрезок из одного числа, равного $L(v)$ (или $R(v)$ – кому как нравится). Значит, во-первых, именно это число мы и искали, а, во-вторых, его надо вычеркнуть – изменить $\text{amount}(v)$ на 0.

Вот, собственно, и всё. Мы ищем K -ое по порядку невычеркнутое число на отрезке от 1 до N , а за этот отрезок отвечает корень нашего построенного дерева – вот для него и найдём K -ое по порядку невычеркнутое число.

За учебными материалами в этот раз лучше заглянуть в материалы предыдущей задачи. В этот же раз я выложил фрагмент из замечательной книги

Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика, 703 стр. М.: Мир, 1988.

В этом фрагменте рассматривается классическая задача Иосифа: каждый раз отсчитываем одно и то же количество человек (или чисел), и требуется узнать, какое число останется последним. Приводится очень красивое на мой взгляд решение с ответом в «почти» явном виде. К решению задачи Runsite идея этого решения вряд ли применима, но уж очень красиво – я не удержался.