Двоичная? Троичная?

Решение.

Как водится, начнём с условия задачи. И сразу нарываемся на такую, как бы это сказать, слишком напористую фразу:

"…любое целое число N может быть единственным образом представлено в виде

$$N = d_0 + d_1 \cdot 2 + d_2 \cdot 2^2 + d_3 \cdot 2^3 + \ldots + d_n \cdot 2^n, \quad \text{причём}$$

1. каждая из «цифр» $d_0, d_1, d_2, \ldots d_n$ равна либо 0, либо 1, либо –1, а $d_n \neq 0$;
2. среди любых двух соседних «цифр» d_{k-1} и d_k ($k=1, 2, \ldots, n$) хотя бы одна равна 0…"

Подобный напор всегда зарождает подозрения – не обман ли это. Давайте попробуем доказать (или опровергнуть) существование и единственность подобного разложения любого целого числа N.

Пусть у нас имеется целое число N. Попытаемся найти его двоично-троичную запись.

$$N = d_0 + d_1 \cdot 2 + d_2 \cdot 2^2 + d_3 \cdot 2^3 + \ldots + d_n \cdot 2^n =$$
$$= d_0 + 2 \cdot (d_1 + d_2 \cdot 2^1 + d_3 \cdot 2^2 + \ldots + d_n \cdot 2^{n-1}).$$

Если N=0, 1 или –1, то полагаем n=0, $d_0 = N$, и всё в порядке. Что же делать, если |N|>=2 ?

Пусть N – чётное число. Сразу видно, что в этом случае $d_0 = 0$ – ведь если $d_0 = \pm 1$, то сумма $d_0 + 2 \cdot (d_1 + d_2 \cdot 2^1 + d_3 \cdot 2^2 + \ldots + d_n \cdot 2^{n-1})$ будет нечётной. И тогда остаётся найти такие $d_1, d_2, \ldots d_n$, что $d_1 + d_2 \cdot 2^1 + d_3 \cdot 2^2 + \ldots + d_n \cdot 2^{n-1} = N/2$, ну, и, конечно, для которых выполняются условия 1 и 2. Иначе говоря, остаётся найти двоично-троичное предстaвдение числа N/2.

Рассмотрим теперь случай N – нечётное число. Тоже совершенно очевидно, что $d_0 = \pm 1$ (только непонятно пока, плюс или минус), и, следовательно (в силу условия 2), $d_1 = 0$. Запишем тогда N в виде $N = d_0 + 4 \cdot (d_2 + d_3 \cdot 2^1 + \ldots + d_n \cdot 2^{n-2})$.

Вот и хорошо – просвечивается некоторая возможность определить знак d_0 – ведь нечётные числа при делении на 4 могут давать <u>два</u> разных остатка: 1 или 3.

Если N при делении на 4 даёт остаток 1, то полагаем $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ и сводим задачу к поиску $d_2, d_3, \ldots d_n$, т.е. к поиску двоично-троичной записи целого числа (N-1)/4;

если же N при делении на 4 даёт остаток 3, то полагаем $d_0 = -1$, $d_1 = 0$ и сводим задачу к поиску двоично-троичной записи целого числа (N+1)/4.

Сразу пара замечаний.

Под остатком понимается «настоящий» остаток (а не тот, который дают операции целочисленного деления в Паскале или C), соответствующий такому определению:

*найти частное и остаток от деления целого числа a на целое число b, отличное от нуля, означает найти целые q и r (называемых соответственно частным и остатком), удовлетворяющих двум условиям: a=b*q+r и 0<=r<|b|.*

Этими условиями частное и остаток определяются однозначно (вот, кстати, ещё одно напористое утверждение, но уж его-то мы здесь доказывать не будем).

Второе замечание. Для того, чтобы сказать, что мы доказали существование двоично-троичной записи любого целого числа, надо ещё убедиться, что описанный процесс закончится за конечное количество шагов. Но это несложно: достаточно убедиться, что во всех трёх случаях модуль остающегося числа уменьшается.

И последнее: единственность двоично-троичной записи любого целого числа сразу следует из вышеописанного – ведь все d_i определялись в описанном процессе однозначно.

Итак, сомнения развеяны. И только? Ну, во-первых, это не так уж мало – развеять сомнения, а, во-вторых, мы на самом деле получили очень мощный инструмент, который позволит нам решить почти всю задачу – оказывается, чтобы получить двоично-троичную запись числа достаточно уметь находить остаток от деления на 4, увеличивать/уменьшать число на 1 и делить на 4. А это очень простые операции. Особенно, если число уже задано в чём-то вроде бы двоичном.

Давайте я нарушу последовательность изложения и допущу небольшой кусочек «снизу-вверх» - сформулирую некий вспомогательный алгоритм, а уж потом мы его применим.

Итак, <u>вспомогательный алгоритм</u> (двоично-троичной нормализации).

Имеется целое число N, заданное «вроде бы двоично»:

$$N = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + c_3 \cdot 2^3 + \ldots + c_m \cdot 2^m,$$

причём все c_i (i=0,1,…,m) – произвольные целые числа, и больше никаких ограничений на c_i не накладывается. Требуется найти двоично-троичную запись числа N:

$$N = d_0 + d_1 \cdot 2 + d_2 \cdot 2^2 + d_3 \cdot 2^3 + \ldots + d_n \cdot 2^n$$

Запишем N в виде $N = c_0 + c_1\cdot 2 + 4\cdot(c_2 + c_3\cdot 2^1 +\ldots+ c_m\cdot 2^{m-2})$. Остаток от деления N на 4 равен остатку от деления на 4 числа $w=(c_0 + c_1\cdot 2)$.

1. Если w – чётное число, то, N – тоже чётно, и, как мы уже знаем, $d_0 = 0$. Запишем тогда N в виде:

$$N = w + 4\cdot(c_2 + c_3\cdot 2^1 +\ldots+ c_m\cdot 2^{m-2}) = 2\cdot((w/2) + c_2\cdot 2^1 + c_3\cdot 2^2 +\ldots+ c_m\cdot 2^{m-1}) .$$

С другой стороны, поскольку $d_0=0$, $N = 2\cdot(d_1 + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 +\ldots+ d_n\cdot 2^{n-1})$, т.е.

$$d_1 + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 +\ldots+ d_n\cdot 2^{n-1}$$

представляет из себя двоично-троичную запись числа

$$(w/2) + c_2\cdot 2^1 + c_3\cdot 2^2 +\ldots+ c_m\cdot 2^{m-1}.$$

2. Если w при делении на 4 даёт остаток 1, то $d_0=1$, $d_1=0$. В этом случае получаем

$$N = 1 + 4\cdot((c_2 + (w-1)/4) + c_3\cdot 2^1 +\ldots+ c_m\cdot 2^{m-2}) = 1 + 4\cdot(d_2 + d_3\cdot 2^1 +\ldots+ d_n\cdot 2^{n-2}),$$

т.е. $d_2 + d_3\cdot 2^1 +\ldots+ d_n\cdot 2^{n-2}$ есть двоично-троичная запись числа $(c_2 + (w-1)/4) + c_3\cdot 2^1 +\ldots+ c_m\cdot 2^{m-2}$.

3. Если w при делении на 4 даёт остаток 3, то $d_0=-1$, $d_1=0$. В этом случае получаем

$$N = -1 + 4\cdot((c_2 + (w+1)/4) + c_3\cdot 2^1 +\ldots+ c_m\cdot 2^{m-2}) = -1 + 4\cdot(d_2 + d_3\cdot 2^1 +\ldots+ d_n\cdot 2^{n-2}),$$

т.е. $d_2 + d_3\cdot 2^1 +\ldots+ d_n\cdot 2^{n-2}$ есть двоично-троичная запись числа $(c_2 + (w+1)/4) + c_3\cdot 2^1 +\ldots+ c_m\cdot 2^{m-2}$.

Повторяя этот процесс, получим двоично-троичную запись числа N. Тут, правда, появляется ещё один вопрос - а что делать, если мы уже дошли до c_m, а оно (c_m) не равно ни 0, ни 1, ни –1? Очень просто: добавляем $c_{m+1}=0$ и спокойно продолжаем, повторяя операцию добавления нуля столько раз, сколько понадобится. Процесс рано или поздно закончится – это видно и из существования двоично-троичного представления любого целого числа, и непосредственно: во всех наших трёх случаях модуль числа N уменьшался, если только $|N|>1$.

Ну, а теперь сложить и умножить два двоично-троичных числа не представляет никаких проблем. Пусть у нас есть два двоично-троичных числа $X = x_0 + x_1\cdot 2 + x_2\cdot 2^2 + x_3\cdot 2^3 +\ldots+ x_n\cdot 2^n$ и $Y = y_0 + y_1\cdot 2 + y_2\cdot 2^2 + y_3\cdot 2^3 +\ldots+ d_m\cdot 2^m$. Тогда легко видеть, что

$$X+Y = (x_0 + y_0) + (x_1+y_1)\cdot 2 + (x_2+y_2)\cdot 2^2 + \ldots ,$$

$$X\cdot Y = z_0 + z_1\cdot 2 + z_2\cdot 2^2 + z_3\cdot 2^3 +\ldots+ z_{n+m}\cdot 2^{n+m}.$$

Я не буду выписывать формулы для z_i , поскольку в данном случае это, хоть и совсем простое действие, но совершенно ненужное – проще пройтись двойным циклом по X и по Y, собирая z_i в соответствующем массиве. Полученные суммы переведём в двоично-троичную запись с помощью вспомогательного алгоритма.

Раз уж у нас так здорово получилось с двоично-троичной записью, то давайте попробуем проделать то же самое и для двоичной – имеется число, записанное во «вроде бы двоичной» системе, только цифры в нём «неправильные», а мы хотим получить правильную двоичную запись. Более точно: имеется положительное целое число N в двоично-троичной записи:

$$N = d_0 + d_1\cdot 2 + d_2\cdot 2^2 + d_3\cdot 2^3 +\ldots+ d_n\cdot 2^n$$

Требуется получить двоичную запись числа N:

$$N = b_0 + b_1\cdot 2 + b_2\cdot 2^2 + b_3\cdot 2^3 +\ldots+ b_k\cdot 2^k,\ \text{где } b_i = 0 \text{ или } 1 \text{ для всех } i \text{ от } 0 \text{ до } k.$$

Стоп. Положительное... А если N – отрицательное? А тогда заменим число N на –N, благо в двоично-троичной записи это сделать проще простого: заменить все 1 на –1, а –1 – на 1. А как отличить положительное число от отрицательного по его двоично-троичной записи? А очень просто и интуитивно ясно: знак числа N совпадает со знаком его старшей цифры (d_n). Интуитивно ясно – это хорошо, но хотелось бы чего-нибудь более убедительного? Пожалуйста.

Пусть $N = d_0 + d_1\cdot 2 + d_2\cdot 2^2 + d_3\cdot 2^3 +\ldots+ d_n\cdot 2^n$, и $d_n = 1$. Тогда, даже если все остальные цифры d_i будут равны –1 (хотя этого и не может быть – но такое предположение только усиливает нашу оценку), то $2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \ldots - 2^1 - 1 = 1 > 0$, т. е. $N>0$. Аналогично доказывается, что если $d_n=-1$, то $N<0$. Так что будем искать двоичную запись числа N, считая его положительным.

Запишем $N = d_0 + 2\cdot(d_1 + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 +\ldots+ d_n\cdot 2^{n-1})$ в виде

$$N = b_0 + 2\cdot(b_1 + b_2\cdot 2^1 + b_3\cdot 2^2 +\ldots+ b_k\cdot 2^{k-1}).$$

Начнём со случая $d_0 = 0$. Тогда N – чётное число, и b_0 тоже должно равняться 0 (если $b_0=1$, то сумма $b_0 + 2(b_1 + b_2\cdot 2^1 + b_3\cdot 2^2 +\ldots+ b_k\cdot 2^{k-1})$ будет нечётной). И тогда должно выполняться равенство $b_1 + b_2\cdot 2^1 + b_3\cdot 2^2 +\ldots+ b_k\cdot 2^{k-1} = d_1 + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 +\ldots+ d_n\cdot 2^{n-1}$, т.е. нам остаётся найти двоичную запись числа $d_1 + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 +\ldots+ d_n\cdot 2^{n-1}$. Итак, если $d_0 = 0$, то полагаем $b_0=0$, а остальные цифры двоичной записи находим, переводя двоично-троичную запись $d_1 + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 + \ldots + d_n\cdot 2^{n-1}$ в двоичную запись.

Если же $d_0 = 1$, то всё обстоит абсолютно точно также, только $b_0=1$, а все остальные цифры двоичной записи находим, переводя двоично-троичную запись $d_1 + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 + \ldots + d_n\cdot 2^{n-1}$ в двоичную.

А если $d_0 = -1$? Тогда N нечётно, и b_0 должно быть 1. Получается

$$-1 + 2\cdot(d_1 + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 + \ldots + d_n\cdot 2^{n-1}) = 1 + 2\cdot(b_1 + b_2\cdot 2^1 + b_3\cdot 2^2 + \ldots + b_k\cdot 2^{k-1}),\ \text{т.е.}$$

$$(d_1-1) + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 + \ldots + d_n\cdot 2^{n-1} = b_1 + b_2\cdot 2^1 + b_3\cdot 2^2 + \ldots + b_k\cdot 2^{k-1}.$$

Всё? Нет, не всё. Появилось выражение (d_1-1). Если $d_1=1$ или $d_1=0$, то всё нормально: $(d_1-1) + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 + \ldots + d_n\cdot 2^{n-1}$ есть двоично-троичная запись. А если $d_1=-1$? Тогда плохо. Но не будем сразу сдаваться. Посмотрим, что будет дальше. Если $d_1=-1$, то $-2 + d_2\cdot 2^1 + d_3\cdot 2^2 + \ldots + d_n\cdot 2^{n-1} = 2\cdot((d_2 - 1) + d_3\cdot 2^1 + \ldots + d_n\cdot 2^{n-2})$ – чётное число. Полагаем $b_1 = 0$ и получаем

$$2\cdot((d_2 - 1) + d_3\cdot 2^1 + \ldots + d_n\cdot 2^{n-2}) = b_2\cdot 2^1 + b_3\cdot 2^2 + \ldots + b_k\cdot 2^{k-1} = 2\cdot(b_2 + b_3\cdot 2^1 + \ldots + b_k\cdot 2^{k-2}),\ \text{или}$$

$$(d_2 - 1) + d_3\cdot 2^1 + \ldots + d_n\cdot 2^{n-2} = b_2 + b_3\cdot 2^1 + \ldots + b_k\cdot 2^{k-2}.$$

Снова, если $d_2=1$ или $d_2=0$, то $(d_2-1) + d_3\cdot 2^1 + \ldots + d_n\cdot 2^{n-2}$ есть двоично-троичная запись, а если $d_2=-1$, то мы снова попадаем в ситуацию с -2. Ну, и обработаем эту ситуацию точно также. Рано или поздно мы из неё выберемся – в конце концов число $N > 0$, т.е. $d_n=1$.

Итого, никаких других случаев, кроме цифры 1, 0, -1 или –2 в последнем (младшем) разряде не может быть. Ну, и будем двигаться себе потихоньку от младших разрядов к старшим, пока число N не кончится. А в конце, как уже отмечено, проблем быть не может – процесс сразу остановится. Едиственное но – в старших разрядах двоичного числа могут появится нули. Ну, так и уберём их – это просто.

Осталось только научиться сравнивать двоично-троичные числа. Мы уже знаем, что если в старшем (самом «тяжёлом») разряде стоит p, то число положительное, а если m – то отрицательное. А как сравнить два положительных числа? Заметим, что наибольшее n-значное двоично-троичное число – это число p0p0p0… . В самом деле, вторая слева цифра обязательно должна быть 0. А если поставить 0 на третье слева место, то, даже если после этого поставить p на все оставшиеся позиции, получится число, меньшее p0p0000… (ведь $2^t > 2^{t-1}+2^{t-2}+\ldots+2^1+1$). Аналогично доказывается, что самое маленькое положительное n-значное двоично-троичное число – это число p0m0m0m0… . Пусть X – самое большое n-значное двоично-троичное число, а Y – наименьшее (n+1)-значное положительное двоично-троичное число. Тогда X-Y = pmmmmm… Конечно , полученная запись не есть двоично-троичная запись, но вычислить мы величину X-Y всё равно можем, и равна она 1, т.е. X>Y. Итак,

наименьшее положительное (n+1)-значное двоично-троичное число >
> наибольшее n-значное двоично-троичное число >
> наименьшее положительное n-значное двоично-троичное число >
> наибольшее (n-1)-значное двоично-троичное число >
> наименьшее положительное (n-1)-значное двоично-троичное число > …

Продолжать можно сколько угодно...

Отсюда сразу видно, что если два положительных двоично-троичных числа имеют разную длиину, то более длинное число больше менее длинного. А если их длина одинакова? Тогда отбрасываем старшие (крайние слева) цифры, пока на крайней слева позиции у них не окажутся различающиеся цифры. И сравниваем оставшиеся числа точно также. Остаётся только заметить, что из двух отрицаьельных двоично-троичных чисел меньше то, длина которого больше. Доказать это можно, например, сравнив вместо отрицательных чисел X и Y, положительные числа –X и –Y. В общем, для сравнения чисел в двоично-троичной записи применимы абсолютно те же правила, что и для сравнения чисел в десятичной записи.

И, в заключение, о прилагаемых методических материалах. Я в этот раз выкладываю фрагменты из двух книг:

Андреева Е., Фалина И. Информатика: Системы счисления и компьютерная арифметика. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 1999.

Кнут Д. Э. Искусство программирования, том 2. Получисленные алгоритмы. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2000 (или, попросту, из второго Кнута ☺ - кто ж не знает, что такое Кнут).

Оба фрагмента интересны, прежде всего, тем, что в них обсуждаются не только (да и не столько) алгоритмы перевода из одной системы счисления в другую, но алгоритмы вычислений в самых разнообразных системах счисления – системах записи чисел. Подчеркну, самых разнообразных, в том числе и весьма экзотических, систем счисления. Обсуждаются и применения разных систем для решения различных задач – иначе, зачем оно нужно, такое изобилие. В общем, чрезвычайно яркое чтение, хотя, зачастую, и совсем непростое. Я, конечно, выкладываю и указания к решению задач и упражнений из Кнута, но ... В общем, посмотрИте... В любом случае, красота открывается неимоверная. А многие вещи станут вам понятны гораздо глубже.