Переставляя цифры...

Решение.

Часть 1. Поиск следующего числа.

Только не рассказывайте, что при сравнении двух чисел вы пользуетесь школьным «определением»: число a больше числа b, если разность (a-b) положительна. Вы ведь просто смо́трите, какое из чисел длиннее. А если числа одинаковой длины? Тогда, разумеется, просматриваем их слева направо в поисках первого различия: то число, у которого соответствующая цифра больше, и есть большее число. Понятно, что 1234567890987654321 больше числа 1234567890123456789, поскольку первые десять цифр у них совпадают, а одиннадцатая цифра первого числа (это 9) больше 1, стоящей на одиннадцатом месте второго числа.

Чудесно. Мы уже кое-что знаем про число, которое нам нужно найти: оно до некоторого момента совпадает с заданным числом, а в первом же слева отличии его цифра должна быть больше соотвествуюшей цифры заданного числа.

Второе. Искомое число должно быть при этом как можно меньше. Это означает, что первое слева несовпадение должно находится как можно правее (поскольку первое несовпадение обязательно должно быть в сторону увеличения). А при каких обстоятельствах мы можем увеличить K-ю цифру числа, не меняя предыдущих цифр? Ну, конечно же, если справа от нее найдётся цифра, меньшая K-ой цифры.

Давайте искать наибольшее такое K. Обозначим L – длину заданного числа N. Может ли K=L? Нет, конечно, тогда K-ю цифру просто не на что заменять. Тогда, может быть, K=L-1? Может, если $n_{L-1}>n_L$ (n_p будем обозначать p-ю цифру числа N). А если $n_{L-1}<=n_L$? Тогда придётся двигаться дальше влево. Если $n_{L-2}>n_{L-1}$, то K=L-2, а если $n_{L-2}<=n_{L-1}$, то продолжаем дигаться влево. Иначе говоря, ищем наибольшее K, при котором $n_K<n_{K+1}>=n_{K+2}>=\ldots>=n_L$.

Нашли такое K, теперь нужно увеличить n_K наименьшим возможным способом, т.е. найти среди n_{K+1}, n_{K+2}, …, n_L наименьшую цифру, большую n_K. Ситуация упрощается тем, что эти цифры упорядочены: $n_{K+1}>=n_{K+2}>=\ldots>=n_L$. Поэтому двигаемся, начиная с n_{K+2} , вправо в поисках первой цифры, не превосходящей n_K. Если такая цифра находится на (J+1)-м месте, то меняем местами n_K и n_J, а если такой цифры нет, то меняем местами n_K и n_L. В программе применена маленькая хитрость: чтобы не проверять всё время, дошли ли мы до правого края числа N, справа к числу N временно прицеплен символ, меньший цифры 0 (и, конечно, любой другой цифры) – этот символ и затормозит продвижение вправо, если мы доберёмся до правого края.

Переставили две цифры. Теперь, как бы не стояли цифры, правее K-ой позиции, полученное число всё равно будет больше N. Но мы хотим найти наименьшее число, большее N, - поэтому надо расставить цифры n_{K+1}, n_{K+2}, …, n_L так, чтобы они образовывали наименьшее возможное число, т.е. в порядке возрастания (точнее, неубывания). Конечно, можно их и отсортировать, цифр совсем немного, но полезно заметить, что, даже после перестановки K-й и J-й цифр, цифры, стоящие правее K-ой позиции идут в невозрастающем порядке. В самом деле, сейчас на J-ом месте стоит бывшая цифра n_K, но мы выбирали позицию J так, чтобы выполнялись условия $n_K<n_J$, $n_K>= n_{J+1}$, т.е. невозрастающий порядок не нарушился, и нам просто надо перевернуть отрезок от (K+1)-ой до последней цифры задом наперёд.

Задание первой части - совершенно стандартное, коротко и грубо его можно сформулировать так: «найти следующую перестановку в лексикографическом порядке». Поиск в Google по длинной фразе «следующая перестановка в лексикографическом порядке» дал более 500 результатов, т.е. процесс описан много где. Я рискну сделать выбор и порекомендую вот эту ссылку:

http://rain.ifmo.ru/cat/view.php/vis/combinations/permutations-2000

Прекрасный визуализатор описанного алгоритма. Там, правда, не допускаются повторяющиеся элементы в перестановке, но это практически никакой роли не играет.

Часть 2. Подсчёт предшествующих чисел.

Здесь нам во многом пригодятся те соображения из первой части, которые связаны с пониманием того, что такое больше/меньше. Повторим, слегка модифицировав, выводы:

> Имеются два числа - А и В – одинаковой длины. *Число В меньше числа А* означает, что число В до некоторого момента совпадает с числом А, а в первом же слева отличии его цифра меньше соотвествующей цифры числа А.

Итак, имеется число N. Подсчитаем количество чисел X, составленных из тех же цифр, что и N, меньших N, совпадающих с N в первых (K-1) позициях (считая слева) и отличающихся от N в K-й позиции.

Давайте начнём с примера. Пусть N=2343324223043304, K=5. Первые 4 цифры числа X известны – это 2343. Остаётся 12 цифр: 2 нуля, 3 двойки, 4 тройки и 3 четвёрки. На пятом месте должна стоять цифра, меньшая 3. Это или 0, или 2. Если на пятом месте поставить цифру 2, то оставшиеся 11 цифр можно переставлять как угодно – всё равно получающееся число будет меньше N. Оставшиеся 11 цифр – это 2 нуля, 2 двойки, 4 тройки и 3 четвёрки. И переставить их можно P(2,2,4,3) способами.

$P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ обозначает количество различных перестановок объектов m различных видов, причём имеется n_1 объектов первого вида, n_2 объектов второго вида, …, n_m объектов m-го вида. Или, говоря коротко, $P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ – это количество перестановок с повторениями, имеющих состав $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$. Нетрудно доказать/понять, что $P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ вычисляется следующим образом:

Подробнее об этом можно прочитать, например, в книге (уже упоминавшейся в решении первой задачи) *Н.Я. Виленкин*. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с. Соответствующий фрагмент этой книги лежит в учебных материалах ко второй (этой) задаче. Не удержусь и повторю ссылку, по которой можно скачать полный текст этой книги:

http://www.math.ru/lib/book/djvu/kombinatorika.djvu

Краткий вывод формулы количества перестановок с повторениями имеется также в книге

Н.Я. Виленкин. Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей. М.: Просвешение, 1976. 48 с.

И эта книга упоминалась в первой задаче, фрагмент лежит в учебных материалах к первой задаче (файл **`vilenkin76.pdf`**), пункт 14 этого фрагмента посвящён именно перестановкам с повторениями.

Но вернёмся к примеру. Итак, N=2343324223043304, а мы ищем количество чисел, полученных перестановкой цифр числа N, меньших N и совпадающих с N в первых 4 цифрах. На пятом месте может стоять либо цифра 2, либо цифра 0. В первом случае имеется P(2,2,4,3) интересующих нас чисел, во втором - P(1,3,4,3), поскольку последние 11 цифр – это 1 ноль, 3 двойки, 4 тройки и 3 четвёрки, переставленные в произвольном порядке. Итого, $P(2,2,4,3)+P(1,3,4,3)= \dfrac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 3!}+\dfrac{11!}{1!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 3!} = 69300+46200 = 115500$ чисел.

Понятно, что в общем случае мы действуем точно также. А именно, для всех K от 1 до L-1 (L – длина числа N) находим количество чисел, полученных перестановкой числа N, меньших N, совпадающих с N в первых (K-1) позициях и отличающихся от N в K-ой позиции:

пусть на позициях от K-ой до последней имеется n_0 ноликов, n_1 единиц, …, n_9 девяток; пусть на K-ой позиции в числе N стоит цифра a;

для всех цифр b от 0 до (a-1), для которых $n_b>0$, добавляем к результату величину $P(n_0, n_1, \ldots, n_b-1, \ldots, n_9)$.

Единственное замечание – на первом месте не должен стоять 0, поэтому для K=1 перебираем цифры b от 1 до (a-1).