Научно-популярный
физико-математический журнал
"Квант"
(издается с января 1970 года)

О проекте

МЦНМО
Редакция журнала "Квант"

Рейтман М., **Динамическое программирование**

kvant.r

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

М. РЕЙТМАН

Лестница фараона

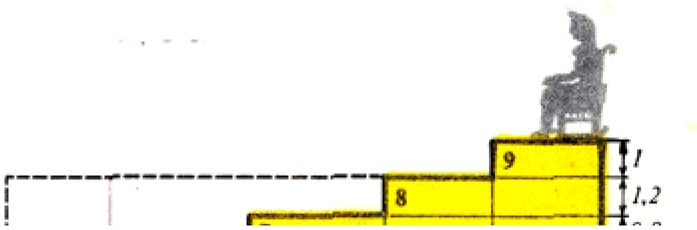
Дворец фараона славился своей роскошью: жемчужные занавесы, стены, отделанные янтарем, золотая посуда — всего не перечесть. Но больше всего поражала тех, кто допускался в тронный зал дворца, золотая лестница, которая вела к трону. Как выглядела эта лестница в разрезе, если перевести древнеегипетские меры в дециметры, вы видите на рисунке 1. Археологам не пришлось долго ломать головы, чтобы понять, отчего ступени поначалу были такими низкими, все объяснялось просто: престарелый фараон не хотел, чтобы подданные видели, как тяжело ему взбираться на трон, они могли утратить почтение, а кто знает, чем это могло кончиться? Поэтому он и повелел придворным ювелирам сделать лестницу с такими низкими ступенями, не выше 1,5 дм.

Но время шло, и старый фараон скончался. Его молодой сын принял царство.

Молодой фараон слышал и раньше, как придворные посмеивались над наивной хитростью отца. И хотя сам он обычно взлетал на трон, прыгая через три ступеньки, но кривотолки продолжались. И молодой фараон решил покончить с ними, нарастив лестницу. Для этого он призвал придворных ювелиров и казначея и сказал им:

— Слуги мои! Повелеваю вам нарастить лестницу так, чтобы она имела самое большее четыре ступени. Устройте их, где хотите, но чтобы их было не больше четырех!

— Но государь,— робко вышел вперед казначей,— где взять столько золота? Вот я тут прикинул на листке папируса (и казначей показал то, что изображено на рисунке лестницы пунктиром). Лестница имеет ширину 1 м, или 10 дм. Значит, для ее наращивания понадобится $[3\times1{,}5+1{,}2\times(5+1)+1\times1+1\times3+0{,}8\,(3+4)+1{,}2\times11]\times10=345$ дм^3 золота! Увы, государь, столько не найдется в нашей казне, разоренной войной.



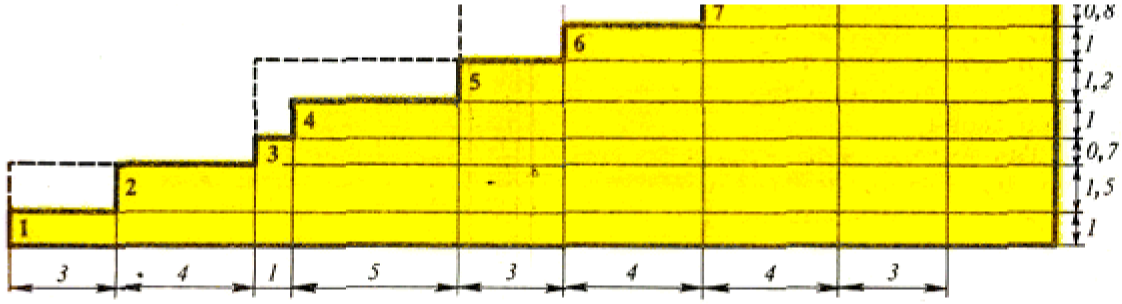


Рис. 1.

2

— Негодяй! Ты хочешь разорить страну! Да я сразу вижу, что ты и не думал всерьез об экономии! Смотри! — и фараон провел красную линию.— Ты всегда готов потратить лишнее золото!

— О мудрейший из фараонов! В самом деле, ты прав. Но это дает выигрыш лишь 90 дм^3, а 345—90=255 дм^3 у нас тоже нет.

— Презренный! Ты бросаешь тень на мое могущество! Если через 7 дней лестница не будет готова, я сам утоплю тебя в священном Ниле, а ювелиры будут проданы в рабство. И не вздумай еще раз соваться со своими дурацкими чертежами!

Удрученным ушел казначей от фараона и отправился к своему другу. Не было человека искуснее, когда нужно было распланировать пирамиду или исчислить земельные наделы. Хотя друг и был по должности жрецом столичного храма, но слыл человеком расчетливым и практичным. Узнав о беде, он спросил:

— А сколько золота осталось в казне?

— 200 дм^3.

— Не густо! А может быть, можно обойтись меньшим количеством, если иначе распланировать ступеньки?

— Я пробовал,— вздохнул казначей,— но вариантов так много, а времени в обрез.

— Ладно, друг,— сказал жрец.— Дай мне подумать, и приходи завтра.

Когда на следующий день убитый горем казначей приплелся к жрецу, тот встретил его довольной улыбкой.

— А скажи, друг, могу ли я рассчитывать на оставшееся золото, если найду оптимальный вариант? Я пробовал и так и сяк, но он мне не попадался!

— Слушай же,— молвил жрец.— Сначала я разобрал случаи, когда лестницы из разного числа ступенек заменяются всего одной ступенькой. Чтобы числа были попроще, я буду вычислять только площадь f фигуры между сплошной и пунктирной линиями, а постоянный множитель, ширину лестницы, добавлю потом. Не возражаешь? Если бы первоначальная лестница состояла всего из одной ступеньки, то и наращивать было бы нечего:

$$f_1(1)=0.$$

Формула

$$f_1(2)=1,5\times3=4,5$$

показывает, что если две первые ступеньки лестницы фараона заменяются одной ступенькой, на это требуется 4,5 дм^2. Аналогично найдем

$$f_1(3)=1,5\times3+0,7\times(3+4)=9,4.$$

Ну а дальше

$$f_1(4)=9,4+1\times(3+4+1)=17,4,$$

$$f_1(5)=17,4+1,2\times(3+4+1+5)=33,$$

и так далее.

— Все это понятно,— возразил казначей,— но зачем мне одна ступенька? Ведь фараон просил четыре! Да и лестница имеет их сейчас не пять, а куда больше!

— Не торопись! — улыбнулся жрец.— Скоро новых ступенек станет больше — две (рис. 2). Но вначале найдем площадь одной ступени, начинающейся и на других ступенях первоначальной лестницы: их также легко посчитать одну за другой. На-ли обойдусь меньшим количеством?

— О боги! — воскликнул казначей, не веря своему счастью.— Ты получишь еще дюжину рабов и столько же мер зерна!

— Так смотри же! — и жрец протянул ему лист папируса, где был другой проект наращивания лестницы.— Этот проект требует лишь 171 дм^3 золота. А остальные 29 дм^3 — мои!

— Но скажи, о величайший из вычислителей, как ты нашел такой пример, чтобы нарастить ступеньку от 2-ой до 4-й, требуется

$$g(2,4)=2,8+1\times 5=7,8 \text{ дм}^2.$$

Все эти числа, которые понадобятся в наших подсчетах, я записал в таблицу, которая поместилась на одном листе папируса (рис. 3). Числа $g(1, j)=f_1(j)$ в столбце «*одна* ступенька» мы уже посчитали, а дальше удобно вычислять ряд за рядом, двигаясь вправо и вверх: $g(2,3)$, $g(3,4)$, $g(2,4)$,

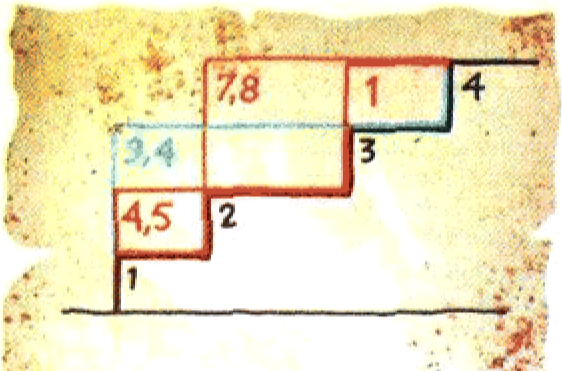
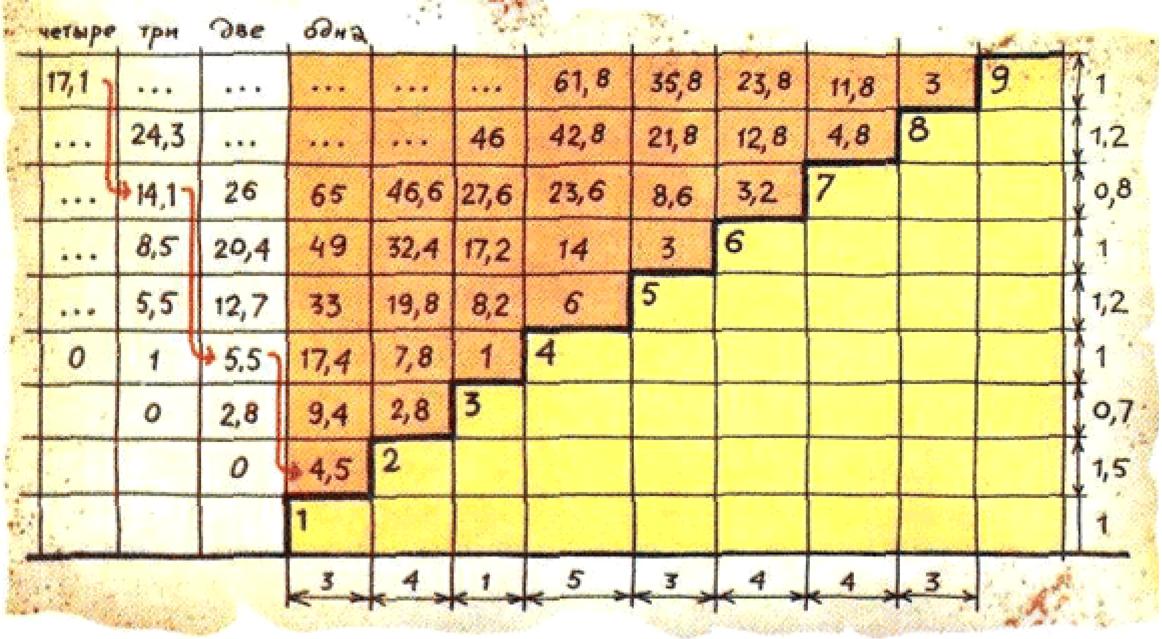


Рис. 2. Меньше всего золота требуется для наращивания красной лестницы: $f_2(4)=4,5+1=$ $=5,5$.



четыре	три	две	одна									
17,1	…	…	…	…	…	61,8	35,8	23,8	11,8	3	9	1
…	24,3	…	…	…	46	42,8	21,8	12,8	4,8	8		1,2
…	14,1	26	65	46,6	27,6	23,6	8,6	3,2	7			0,8
…	8,5	20,4	49	32,4	17,2	14	3	6				1
…	5,5	12,7	33	19,8	8,2	6	5					1,2
0	1	5,5	17,4	7,8	1	4						1
	0	2,8	9,4	2,8	3							0,7
		0	4,5	2								1,5
			1									1
			3	4	1	5	3	4	4	3		

Рис. 3. Числа $g(i, j)$, $1\leqslant i<j\leqslant 9$ в темных клетках показывают, сколько золота требуется для одной ступени от i-й до j-й ступеньки первоначальной лестницы, а числа $f_k(j)$ в левой части ($k=2, 3, 4$) — какого минимального количества золота потребует лестница из k ступенек до j-го уровня.

$g(2,5)$, ... Давай теперь подсчитаем минимальные площади при двух ступеньках. $f_2(1)$ не имеет смысла, заменить одну ступеньку двумя мы не можем. Чтобы заменить две ступеньки двумя новыми, наращивать их не придется:

$$f_2(2)=0.$$

$f_2(3)$ = ... рисунке 2 они показаны разными цветами):

$$f_2(4)=\min\{g(2,4), f_1(2)+g(3,4), f_1(3)\}=\min\{7,8;\ \underline{4,5+1};\ 9,4\}=5,5,$$

и так далее... (Все эти вычисления приведены в таблице на рисунке 4.)

— Погоди, я понял, как найти наи-

Вот $f_2(3)$ подсчитать несколько сложнее. Здесь нужно рассматривать два варианта и выбрать оптимальный: чтобы заменить первые три ступеньки двумя, мы должны нарастить либо вторую ступеньку, либо первую, и $f_2(3)$ равно наименьшей из соответствующих площадей:

$$f_2(3)=\min\{g(2,3);\ f_1(2)\}=\\=\min\{\underline{2,8};\ 4,5\}=2,8.$$

Для отыскания $f_2(4)$ потребуется найти наименьшее из трех чисел (на рисунке ... лучшую лестницу из двух ступеней, но ведь дальше число вариантов будет быстро возрастать: страшно даже подумать, какое количество лестниц из трех ступеней надо рассчитать,— а ведь нам нужна лестница из четырех ступеней! Неужели ты рассмотрел здесь все варианты?

— А в этом нет нужды, как ты сейчас увидишь. Например, найдем $f_3(4)$: наименьшую по площади лестницу из трех ступеней, заканчивающуюся на уровне 4-й старой ступени.

$f_2(3)=\min\{\underline{2,8};\ 4,5\}=2,8$
$f_2(4)=\min\{7,8;\ \underline{1+4,5};\ 9,4\}=5,5$
$f_2(5)=\min\{19,8;\ \underline{8,2+4,5};\ 6+9,4;\ 17,4\}=12,7$
$f_2(6)=\min\{32,4\quad 17,2+4,5;\quad 14+9,4;\quad \underline{3+}$
$\underline{+17,4};\ 33\}=20,4$
$f_2(7)=\min\{46,6;\quad 27,6+4,5;\quad 23,6+9,4;\quad \underline{8,6+}$
$\underline{+17,4};\ 3,2+33;\ 49\}=26$
$f_3(4)=\min\{\underline{1};\ 2,8\}=1$
$f_3(5)=\min\{0+8,2;\ 2,8+6;\ \underline{5,5}\}=5,5$
$f_3(6)=\min\{0+17,2;\ 2,8+14;\ \underline{5,5+3};\ 12,7\}=8,5$
$f_3(7)=\min\{0+27,6;\ 2,8+23,6;\ \underline{5,5+8,6};\ 12,7+$
$+3,2;\ 20,4\}=14,1$
$f_3(8)=\min\{0+46;\ 2,8+42,8;\ 5,5+21,8;\ 12,7+$
$+12,8;\ \underline{20,4+4,8};\ 26\}=25,2$
$f_4(9)=\min\{0+61,8;\ \ 1+35,8;\ \ 5,5+23,8;\ \ 8,5+$
$+11,8;\ \underline{14,1+3};\ 24,3\}=17,1$

Рис. 4.

Посмотрим, где может кончаться вторая ее ступень. Конечно, на 2-й или на 3-й старой. Но мы уже знаем, какая именно двуступенная лестница оканчивается на этом уровне: $f_2(2)=0$, а площадь наилучшей двухступенчатой лестницы $f_2(3)=2,8$ мы уже нашли, так что

$$f_3(4)=\min\{g(3,4);\ f_2(3)\}=\\=\min\{\underline{1};\ 2,8\}=1.$$

— Постой, я хочу убедиться, что понял, как найти $f_3(5)$. Из трех ступеней, заканчивающихся на 5-й, вторая может закончиться на 2-й, 3-й или 4-й старой. Значит,

$$f_3(5)=\min\{g(3,5);\ f_2(3)+g(4,5);\\ f_2(4)\}=\min\{8,2;\ 2,8+6;\ \underline{5,5}\}=5,5.$$

— Воистину, мудрые следят за казной государства,— польстил жрец.— Точно так же можно посчитать f_3 от 6, 7 и 8, а затем перейти к случаю с четырьмя ступенями. Теперь уже рассматривать $f_4(4), \ldots, f_4(8)$ нет нужды: мы точно знаем, что последняя четвертая ступенька кончается на старой девятой (иначе бы лестница имела больше четырех ступенек). Итак, нам остается найти $f_4(9)$ как минимум из сумм $f_3(j)+g(j,9)$, где j — одно из шести чисел 3,4, ..., 8; это число равно $f_3(7)+g(8,9)=14,1+3=17,1$. Эта — минимальная из всех четырехступенных лестниц!

Значит, всего на лестницу понадобится $17,1\times10=171$ (дм^3) золота. А теперь давай найдем, где должны располагаться новые ступеньки. Заметим, что оптимальные варианты всюду подчеркнуты красным. В последний оптимальный вариант вошла стоимость трех новых ступеней $f_3(7)=14,1$; значит, третья ступень должна кончаться на 7-й старой. Теперь вернемся на шаг назад к определению $f_3(7)$ и увидим, что в $f_3(7)$ входит стоимость первых двух ступеней $f_2(4)=5,5$. Следовательно, вторая ступень должна кончаться на 4-й старой. И, наконец, в выражение для $f_2(4)$ входит $f_1(2)=4,5$.

Значит, первую ступень новой лестницы нужно окончить на второй ступеньке старой. Окончательно, самая дешевая лестница изображена на рисунке 5.

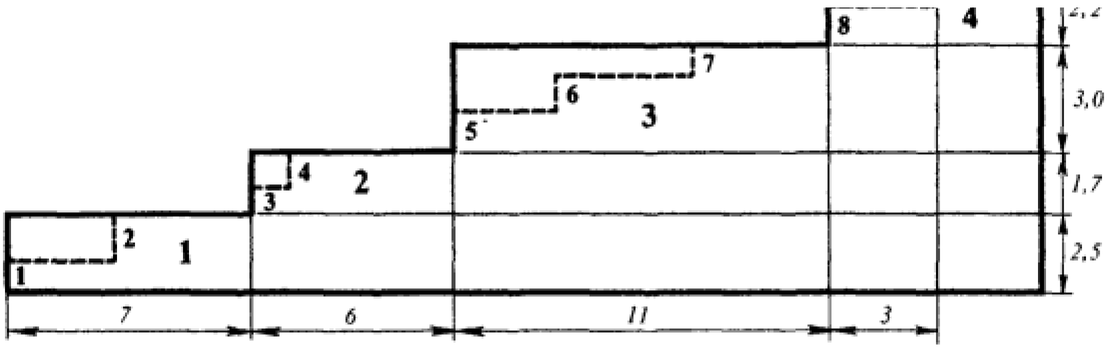


Рис. 5.

Теория динамического программирования

Мы не знаем, выполнил ли хитроумный казначей свое обещание жрецу, более того, мы не знаем, случилась ли вообще описанная история или она вымышлена. Но зато мы знаем, что она вполне могла произойти, ибо в рассмотренной задаче используются только два арифметических действия — сложение и умножение, а они были хорошо известны в Древнем Египте (хотя, конечно, обозначения чисел и операций, которые мы используем, появились значительно позднее). Ну и еще немного используется здравый смысл. А между тем здесь применен математический аппарат, который получил распространение лишь лет сорок назад; он называется динамическим программированием.

Вдумаемся, почему нам удалось найти оптимальное решение, не рассматривая всех возможных вариантов наращивания лестницы (а их очень много, и для их полного исследования жрецу действительно не хватило бы времени). Дело в том, что на каждом шаге мы разбивали общую задачу на ряд более простых.

Пусть требуется нарастить лестницу, имеющую N ступенек, так, чтобы она их имела n, где $N \gg n$, то есть N намного больше n. Допустим, что нам уже известно оптимальное распределение ступенек, когда их в новой лестнице меньше n. Пусть h_k — номер старой ступеньки, на которой кончает-

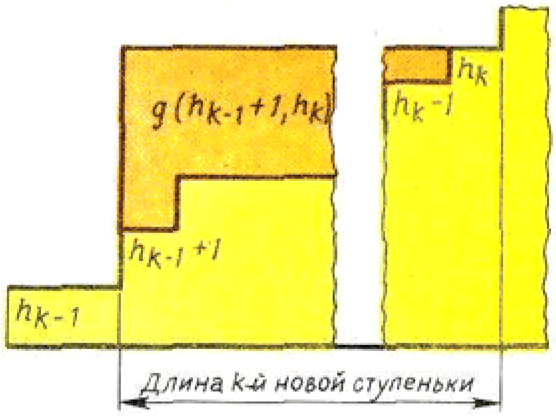


Рис. 6.

сумма первых $n-1$ слагаемых, в которые h_n не входит, принимает наименьшее значение $f_{n-1}(h_{n-1})$ — это та же задача для на 1 меньшего числа ступеней. В результате получаем замечательную формулу Р. Беллмана:

$$f_k(h_k)=\min\{f_{k-1}(h_{k-1})+g(h_{k-1}+1,h_k)\},$$

которая позволяет последовательно найти числа $f_k(h_k)$ (при всех $k \leqslant n$, $h_k \leqslant h$) на каждом шаге. Ее нужно понимать так: для отыскания минимума следует придавать k все возможные значения, начиная с 1, и для каждого найти и запомнить значение h_{k-1}, доставляющее наименьшую величину $f_k(h_k)$. А затем, дойдя до последнего значения $k=n$, нужно, «пятясь», вернуться назад и найти все оптимальные значения h_{n-1}, $h_{n-2}, \ldots$ $\ldots, h_1$ (см. красные стрелки на рисунся k-я новая. Очевидно, начинается эта k-я ступенька на $(h_{k-1}+1)$-й старой. Добавочную площадь, показанную на рисунке 6, обозначим через $g(h_{k-1}+1,\ h_k)$. Общая задача состоит в том, чтобы найти значения h_1, $h_2, \ldots, h_{k-1}$, при которых сумма k величин

$$g(1, h_1)+g(h_1+1, h_2)+\ldots$$
$$\ldots+g(h_{k-2}+1, h_{k-1})+g(h_{k-1}+1, h_k)$$

(при заданном $k=n$ и $h_k=h$) наименьшая, обозначим это наименьшее значение через $f_n(h_n)$. Заметим, что

ке 3).

Обсуждение метода и немного истории

Обратим внимание на то, что в описанном методе не накладывается никаких условий на вид функций g (этим динамическое программирование выгодно отличается от линейного, в котором требуется, чтобы все рассматриваемые зависимости были линейными и переменные изменялись непрерывно). Существенно лишь, что функцию f, минимум которой мы

ищем, удается представить в виде суммы членов, в которой предыдущий зависит от меньшего числа переменных. Поэтому уравнение Р. Беллмана и вышеописанный метод используются сейчас очень широко. Но, разумеется, не для удовлетворения прихотей фараонов. Попробуйте без него найти оптимальное соотношение весов ступеней космической ракеты, *определить наилучший принцип унификации деталей*, построить расписание, в котором было бы меньше всего простоев! Вы очутитесь в отчаянном положении казначея, сникшего перед обилием возможных вариантов. Разумеется, вручную с помощью динамического программирования почти не считают. Зато оно хорошо приспособлено для счета на ЭВМ и не содержит всяких «подводных камней», которые, к сожалению, встречаются в линейном программировании и других методах отыскания минимумов для функций от многих переменных.

Идея метода динамического программирования витала уже давно. В какой-то мере ее применял еще К. Маклорен (1698—1746) и даже Архимед. Однако окончательно оформилась она в работах американского математика Р. Беллмана и связывается *с его именем*.

Мы здесь показали применение динамического программирования к весьма простой задаче. Насколько применим этот метод к задачам более

Еще одно приложение

Одно из сравнительно новых применений динамического программирования — молекулярная биология, где «банки данных» содержат биологические последовательности (ДНК, РНК, белков), насчитывающие в сумме многие миллионы «букв», так что в их анализе не обойтись без компьютеров. Молекулы ДНК, содержащие генетическую информацию,— это длинные слова из четырех букв (А, Г, Ц, Т). В процессе эволюции, в результате мутаций, последовательности меняются: одна буква может замениться на другую, выпасть, а может добавиться новая. Насколько похожи два фрагмента — каким наименьшим числом превращений можно один из них получить из другого? Вот точная формулировка задачи такого типа. *Заданы два «слова» (длины m и n), состоящие из букв А, Г, Ц, Т. Найти подпоследовательность наибольшей длины, входящую в то и другое слово.* Опишем простую, предложенную в начале 70-х годов, процедуру, которая решает эту задачу (биологи называют ее алгоритмом Нудельмана — Вунша). Запишем одно из данных слов — $x=(X_1,\ X_2,\ \ldots$ $\ldots,\ X_m)$ — снизу-вверх, а другое — $y=$

Ц	1	2	3	3	4	5	5	6	7
Т	1	2	2	3	4	5	5	6	7

сложным? На этот вопрос нужно отвечать с известной осторожностью. Дело в том, что при этом возникает специфическая трудность, которую назвали «проклятием размерности». Приходится перебирать так много разных возможностей и запоминать столько результатов, что метод теряет свои положительные черты. «Второе дыхание» метод динамического программирования обрел благодаря «распараллеливанию» вычислений, которому в последние годы уделяется все больше внимания специалистами по программированию и конструкторами вычислительных машин.

Г	1	2	2	3	4	4	5	6	6
Г	1	2	2	3	4	4	5	5	5
А	1	1	2	3	4	4	4	4	4
Т	1	1	2	3	3	4	4	4	4
А	1	1	2	3	3	3	3	3	3
Ц	0	1	2	2	2	2	2	2	2
Г	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	А	Г	Ц	А	А	Т	Г	Г	Т

Рис. 7. Одна из последовательностей максимальной длины 7: ГЦААГГТ.

$$\begin{array}{l} x = \_\ \boxed{ГЦА}\ Т\ \boxed{А}\ \_\ \boxed{ГГТ}\ Ц \\ y = А\ \boxed{ГЦА}\ \_\ \boxed{А}\ Т\ \boxed{ГГТ}\ \_ \end{array}$$

Рис. 8. Одно из наилучших «выравниваний» двух слов, найденное на рисунке 7.

$=(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ — слева-направо рядом с таблицей размерами $m \times n$ (рис. 7). Отметим те клетки таблицы, в строке и столбце каждой из которых стоят одинаковые буквы (в таблице на рисунке 7 художник закрасил эти клетки голубым цветом). Теперь будем заполнять таблицу числами a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$ по следующему правилу: a_{ij} равно наибольшему из чисел $a_{i-1,j}$, $a_{i,j-1}$ и (если клетка (i, j) отмечена!) $a_{i-1,j-1}+1$. Конечно, нужно задать еще начальные условия. Они таковы: $a_{11}=1$, если первые буквы X_1 и Y_1 наших слов совпадают (при этом $a_{ij}=a_{ji}=1$ для всех i, j); если же нет, то $a_{11}=a_{12}=\ldots=a_{1,j-1}=0$ и $a_{1j}=\ldots=a_{1n}=1$, если первые $j-1$ букв второго слова y отличны от X_1, а j-я буква $Y_j=X_1$; аналогично, $a_{21}=\ldots=a_{i-1,1}=0$, $a_{i1}=\ldots=a_{m1}=1$, если X_i — первая из букв слова x, совпадающая с Y_1.

Итак, вычисляя каждый раз максимум из двух или трех чисел,— и запоминая, как и в задаче фараона, наш путь,— мы за $m \cdot n$ шагов заполним всю таблицу.

букв свой «вес», отражающий степень их сходства (измеряемую, например, частотой замен одной буквы на другую). Очень важна и задача «множественного выравнивания» сразу нескольких слов, но с ростом числа слов количество необходимых операций в ней быстро растет.

Упражнения

1. Для школьной мастерской решили сначала купить 9 разных токарных станков стоимостью 10, 20, 40, 60, 75, 100, 130, 160, 190 рублей. Каждый из последующих станков в этом ряду может заменить любой предыдущий, но не наоборот. Например, станок за 100 рублей может обрабатывать те же детали, которые обрабатывает станок за 40 рублей. Однако директор школы возразил:

— Слишком много типов станков! Нам будет трудно их обслуживать — ведь для каждого нужны свои запчасти. Давайте купим 9 станков, но всего четырех разных типов, причем так, чтобы купленные станки обладали не меньшими возможностями, чем исходные 9 станков.

— А какие типы станков мы возьмем?

— Выберем их так, чтобы заплатить за все 9 станков поменьше. Евгений Иванович, вы поможете нам выбрать типы станков? — обратился он к учителю математики.

Какие типы станков предложил выбрать учитель и сколько они стоили?

2. То, что предложил проделать директор в предыдущей задаче, называется унификацией. Обычно на практике унификация дает экономическую выгоду. Но как эту выгоду подсчитать?

Пусть снова имеется 9 станков со стоимостями 16, 18, 19, 22, 23, 24, 26, 28, 33 рубля. Требуется составить из них унифицированные серии, как это было сделано раньше, считая, что объединение станков в серии за счет упрощения обслуживания дает снижение затрат на серию по следующей таблице:

Проверьте, что последнее число a_{mn} будет равно длине наибольшей общей подпоследовательности наших двух слов, а саму эту подпоследовательность можно прочесть, двигаясь в обратном порядке (иногда, возможно, путь и не единственный). Биологи обычно изображают результат как «выравнивание» (*alignement*) двух данных слов (рис. 8). Сходные быстрые и требующие мало памяти алгоритмы можно найти и для других похожих задач: например, замене букв можно приписать другой «вес», чем удалению (или вставке); в белковых последовательностях (это — слова из 20 аминокислотных «букв») разумно сопоставить каждой паре

8

Число станков в серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Снижение стоимости	0	12	16	18	20	20	21	21	21

3. Дополните таблицы на рисунке 2, чтобы найти самую экономную лестницу из 5 ступеней; сколько золота на нее потребуется?