Треугольники.

Решение.

Итак, у нас есть три целочисленные точки. Какой, если не целой, может быть площадь образуемого ими треугольника? Посмотрим на формулу в указании: площадь S треугольника ABC выражается через координаты его вершин $A(a_x, a_y)$, $B(b_x, b_y)$ и $C(c_x, c_y)$ следующим образом:

$$S = |(b_x \cdot c_y + a_x \cdot b_y + c_x \cdot a_y) - (c_x \cdot b_y + b_x \cdot a_y + a_x \cdot c_y)|/2$$

Понятно, если величина $(b_x \cdot c_y + a_x \cdot b_y + c_x \cdot a_y) - (c_x \cdot b_y + b_x \cdot a_y + a_x \cdot c_y)$ нечетная, то площадь не будет целым числом, в противном случае – будет.

Значит, нам надо подсчитать количество таких троек точек $A(a_x, a_y)$, $B(b_x, b_y)$ и $C(c_x, c_y)$, для которых величина $(b_x \cdot c_y + a_x \cdot b_y + c_x \cdot a_y) - (c_x \cdot b_y + b_x \cdot a_y + a_x \cdot c_y)$ будет четной. Перебирать все тройки точек – получается слишком долго. Всего троек получается N(N-1)(N-2)/6, и для N=100000 это слишком большая величина.

Спасает нас здесь такое наблюдение: в выражение $(b_x \cdot c_y + a_x \cdot b_y + c_x \cdot a_y) - (c_x \cdot b_y + b_x \cdot a_y + a_x \cdot c_y)$ входят координаты вершин, причем с ними выполняются только операции умножения и сложения/вычитания, т.е. четность этого выражения определяется четностью величин, в него входящих. С этой точки зрения точки (5, 8) и (-11, 100) совершенно одинаковы – у обеих первая координата нечетна, а вторая четна.

Всего получается 4 сорта точек: (чет, чет), (чет, нечет), (нечет, чет), (нечет, нечет). Считаем, одновременно со вводом, сколько точек принадлежит к каждому сорту. Нет необходимости даже хранить координаты самих точек.

Небольшое техническое замечание: выражение (T and 1) – побитовый and с 1 - это, видимо, самый надёжный (и простой) способ определить четность числа T; взятие остатка целочисленного деления (mod в Паскале) чревато получением –1 в качестве результата (для многих компиляторов), другие способы – более сложны, а, значит, и более опасны.

Ну, а дальше перебираем все 64 возможных комбинации трех точек (в цикле, пожалуй, хотя в данном случае несложно и перебрать все случаи вручную – существенно различных комбинаций совсем немного), и, если для некоторой комбинации величина $(b_x \cdot c_y + a_x \cdot b_y + c_x \cdot a_y) - (c_x \cdot b_y + b_x \cdot a_y + a_x \cdot c_y)$ четна, то считаем, сколько троек точек дают такую комбинацию.

Заметим, что точки в тройках надо выбирать различные, следовательно:

если все три точки одного сорта, то выбрать тройку различных точек можно $K \cdot (K-1) \cdot (K-2)$ способами, где K – количество точек этого сорта;

если две точки одного сорта (и всего имеется K точек этого сорта), а третья точка другого сорта (и таких точек L штук), то выбрать три различные точки можно $K \cdot (K-1) \cdot L$ способами;

если все три точки разных сортов, то выбрать три различные точки можно $K \cdot L \cdot M$ способами (K, L, M – количества точек соответствующих сортов).

И последнее: каждый треугольник мы посчитали шесть раз (точки A, B и C образуют треугольники ABC, ACB, BAC, BCA, CAB и CBA), т.е. полученную сумму надо уменьшить в 6 раз.

Это решение реализовано в файле **`triangle1.pas`** .

Получилось всё несложно, работает быстро, но всё-таки хочется чего-нибудь поизящнее ☺

А попробуем подсчитать "плохие" треугольники, с нецелой площадью. Простое геометрическое соображение - если в треугольнике две вершины совпадают, то это не треугольник, а отрезок, и его площадь равна 0 (а 0 - целое число!) - наводит на мысль, что в "плохом" (с нецелой площадью) треугольнике не должно быть вершин одного сорта. Простая непосредственная проверка показывает, что, во-первых, это действительно так, а, во-вторых, что обратное тоже верно: если все три вершины треугольника разных сортов, то площадь треугольника будет не целой. Имеется всего 4 варианта выбрать тройку сортов, к которым могут относится вершины "плохого" треугольника. А всего треугольников, как уже отмечалось выше, N(N-1)(N-2)/6. В результате получилось решение, реализованное в файле **`triangle2.pas`** .

Жаль - оказалась наша задача почти и не задачей вовсе ☹. Ну, ничего, может ещё жизнь наладится...